Diferencijalni račun i primjene u ekonomiji

Šimag, Lucija

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Fakultet ekonomije i turizma
„Dr. Mijo Mirković“

LUCIJA ŠIMAG

DIFERENCIJALNI RAČUN I PRIMJENE U EKONOMIJI

Završni rad

Pula, 2020.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Fakultet ekonomije i turizma
„Dr. Mijo Mirković“

LUCIJA ŠIMAG

DIFERENCIJALNI RAČUN I PRIMJENE U EKONOMIJI

Završni rad

JMBAG: 0035200692, redovita studentica

Studijski smjer: Financijski menadžment

Predmet: Matematika za ekonomiste

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Danijela Rabar

Pula, srpanj 2020.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani _________________________, kandidat za prvostupnika ekonomije/poslovne ekonomije, smjera _____________________ ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

____

U Puli, _________, ________ godine

IZJAVA

o korištenju autorskog djela

Ja, ____ dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj završni rad pod nazivom

____

____

________________ koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, _______________ (datum)

Potpis

____

Sadržaj

1. UVOD 1
2. DIFERENCIJALNI RAČUN (DERIVACIJA) 2
2.1. Pojam derivacije 2
2.2. Derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja 4
3. PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA U EKONOMIJI 7
3.1. Određivanje tijeka funkcije, crtanje grafa funkcije i optimizacija ekonomskih veličina 8
3.2. Marginalni trošak, marginalni prihod i marginalna dobit 14
3.3. Elastičnost potražnje 20
4. PARCIJALNA DERIVACIJA 24
4.1. Pojam parcijalne derivacije 24
4.2. Parcijalne derivacije višeg reda 25
5. PRIMJENA PARCIJALNE DERIVACIJE U EKONOMIJI 27
5.1. Ekstremi funkcija više varijabli i optimizacija ekonomskih veličina 27
5.2. Marginalni trošak, marginalni prihod i marginalna dobit 32
5.3. Parcijalna elastičnost potražnje 33
6. ZAKLJUČAK 36
LITERATURA 37
POPIS TABLICA 38
POPIS SLIKA 38
SAŽETAK 39
SUMMARY 39

1. UVOD

Riječ ekonomija dolazi od grčke riječi *oikonomia* (upravljanje kućom) ili *oikos* (kuća, domaćinstvo) i *nomos* (zakon, pravilo upravljanja). Jedna od definicija ekonomije govori da je ekonomija znanost koja proučava kako društvo ili poduzeće koriste svoje resurse da bi proizveli neko dobro ili usluge i tako zadovoljili svoje potrebe. Društvo ili poduzeće ne može doći do tih rješenja bez korištenja matematike. Ekonomija i matematika su dvije vrlo povezane znanosti, te ekonomija i njezini koncepti ne bi postojali bez matematike.

U ovom završnom radu se obrađuje jedna vrsta primjene matematike u ekonomiji, a to je primjena diferencijalnog računa u ekonomiji. Derivacija funkcije daje rješenje za brojne probleme koje bi bilo teško ili nemoguće riješiti bez poznavanja derivacija i diferencijalnog računa. Neki primjeri problema za koje diferencijalni račun daje rješenja su pronalazak tangente na neku krivulju ili pronalazak brzine neke promjene ili materijalne točke, te pronalazak maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije.

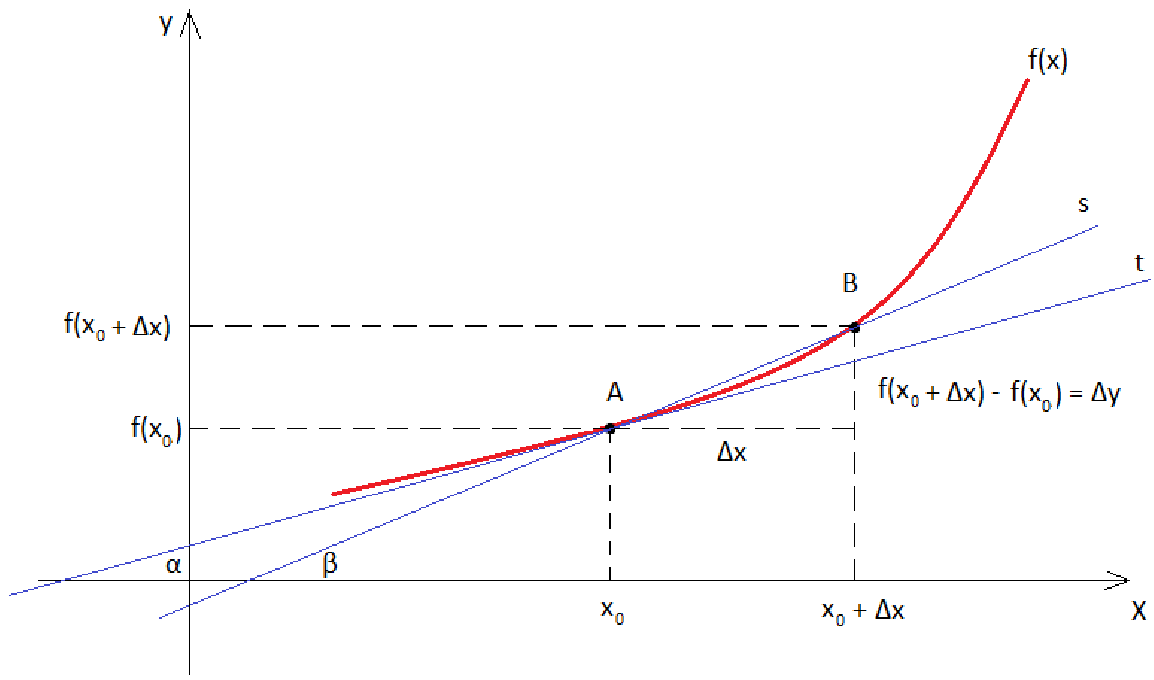
Završni rad se sastoji od šest dijelova. Uvodni dio govori zašto su derivacije važne u ekonomiji. Sljedeći dio jest teorijska obrada derivacija u kojoj se detaljnije proučava pojam derivacije, derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja, te su svi navedeni dijelovi potkrijepljeni računskim primjerima. Treći dio završnog rada govori o nekim od načina na koje se derivacije mogu koristiti u ekonomiji. Četvrti dio završnog rada se sastoji od teorijske obrade parcijalnih derivacija i predstavlja proširenje već obrađene obične derivacije iz drugog dijela završnog rada. Peti dio završnog rada govori o nekim od načina na koje se parcijalne derivacije mogu koristiti u ekonomiji. Šesti dio završnog rada jest zaključak u kojem se ukratko iznosi i objedinjuje obrađena tematika. U nastavku završni rad započinje obradom tematike i obradom teorijskog dijela derivacija.

2. DIFERENCIJALNI RAČUN (DERIVACIJA)

2.1. Pojam derivacije

Pojam derivacije se može opisati putem slike u nastavku.

Slika 1. Derivacija funkcije f(x)



Izvor: Izrada autora u programu *Paint* prema Šego B., Škrinjarić T. i V. Kojić, *Odabrana poglavlja matematičke ekonomije*, Ekonomski fakultet Zagreb, Zagreb 2014., str. 21.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija.[1] Na slici 1 promatramo točku A koja ima koordinate $(x_0, f(x_0))$, te točku B koja ima koordinate $\left(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\right)$. Pravac s predstavlja sekantu kroz točke A i B, te ima jednadžbu $y = cx + d$. Kut β je kut što ga zatvaraju sekanta s i os x. Uočimo da je vrijedi:

[1] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, *Primjena matematike u gospodarstvu*, Veleučilište u Požegi, Požega 2017., str. 153.

$$c = \operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ako bismo točku B htjeli dovesti u točku A kako bi Δx bio što manji i da teži prema 0, tj. $\Delta x \to 0$, tada sekanta s postaje tangenta t, tj. $s \to t$. Tangenta t je pravac sa jednažbom $y = kx + l$ i slijedi da je α kut što ga tangenta t zatvara s osi x. Ako točka B teži prema točki A, tada će i kut β težiti prema kutu α, pa će za $\Delta x \to 0$ vrijediti $\operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha$. Matematički zapisano to izgleda na sljedeći način:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Neka je $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f derivabilna ili diferencijabilna u točki $x_0 \in \Omega$ ako postoji sljedeći limes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,. \tag{1}$$

Ako taj limes postoji, tada ga zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo sa $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0)$ ili $f'(x_0)$. Funkcija f je derivabilna na (a, b) ako je derivabilna u svakoj točki iz (a, b). Ako prethodni limes ne postoji, onda kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki x_0.[2]

Ukoliko uvedemo supstituciju $x = x_0 + \Delta x$, tada se jednadžba (1) može zapisati u sljedećem obliku:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Broj $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se naziva kvocijent diferencije.[3]

Primjer 1. Koristeći definicijsku formulu za derivaciju funkcije odredimo derivaciju sljedeće funkcije: $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 3$.

[2] loc. cit.
[3] ibidem, str. 154.

Rješenje: Koristimo definicijsku jednažbu (1) i uvrštavamo zadanu funkciju kako slijedi:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Primjer 2. Koristeći definicijsku formulu za derivaciju funkcije odredimo derivaciju sljedeće funkcije: $f(x) = x$.

Rješenje: Koristimo definicijsku jednadžbu (1) i uvrštavamo zadanu funkciju kako slijedi:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

2.2. Derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja

Za računanje derivacija se, umjesto definicijske formule, mogu koristiti i derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja. U tablici u nastavku su navedene derivacije osnovnih elementarnih funkcija.[4]

Tablica 1. Derivacije osnovnih elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$
C (konstanta)	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x

[4] ibidem, str. 156.

$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Izvor: izrada autora prema Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, *Primjena matematike u gospodarstvu*, Veleučilište u Požegi, Požega 2017., str. 156.

Neka od najosnovnijih pravila deriviranja su navedena u nastavku:

1. Ako je $f(x)$ derivabilna funkcija, onda je derivabilna i funkcija $y = cf(x)$ i vrijedi: $y' = cf'(x)$.
2. Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ derivabilne funkcije. Tada vrijedi:
   a) derivacija zbroja i razlike: $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$,
   b) derivacija umnoška: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,
   c) derivacija kvocijenta: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \ v(x) \neq 0$,
   d) derivacija kompozicije: $\big[u[v(x)]\big]' = u'[v(x)] \cdot v'(x)$.[5]
3. Neka je funkcija $f(x)$ strogo monotona i derivabilna i neka je $f'(x) \neq 0$. Tada je njena inverzna funkcija $f^{-1}(x)$ derivabilna i vrijedi:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}, \ \ f'(f^{-1}(x)) \neq 0.$$ [6]

[5] ibidem, str. 157.
[6] Gusić I., *Lekcije iz matematike 1*, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije Sveučilišta u Zagrebu, str. 6., http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%201/predavanja/Mat1_Lekcija12.pdf

Primjer 3. Izračunajmo derivacije sljedećih funkcija koristeći derivacije osnovnih elementarnih funkcija i pravila deriviranja:

a) $f(x) = 5x^3$, b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

Rješenje:

a) $f(x) = 5x^3$

$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = x \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Primjer 4. Izračunajmo derivacije sljedećih funkcija koristeći derivacije osnovnih elementarnih funkcija i pravila deriviranja:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 2,$ b) $f(x) = x^3 \cdot \ln x,$

c) $f(x) = (4x^4 - 7x) \cdot (8x^5 + 2x^2 - 1),$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$.

Rješenje:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 2$

$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot 1 - 0 = 4x^3 - 6x + 4$

Kako bismo došli do derivacije funkcije $f(x)$, u primjeru a) smo koristili pravilo deriviranja $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

b) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$

$$f'(x) = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3 \cdot x^{3-1} \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln x + x^2$$

$$= x^2(3 \ln x + 1)$$

U primjeru b) smo koristili pravilo deriviranja $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

c) $f(x) = (4x^4 - 7x) \cdot (8x^5 + 2x^2 - 1)$

$$f'(x) = (4x^4 - 7x)' \cdot (8x^5 + 2x^2 - 1) + (4x^4 - 7x) \cdot (8x^5 + 2x^2 - 1)'$$
$$= (16x^3 - 7) \cdot (8x^5 + 2x^2 - 1) + (4x^4 - 7x) \cdot (40x^4 + 4x)$$
$$= 128x^8 + 32x^5 - 16x^3 - 56x^5 - 14x^2 + 7 + 160x^8 + 16x^5$$
$$- 280x^5 - 28x^2 = 288x^8 - 288x^5 - 16x^3 - 42x^2 + 7$$

U primjeru c) smo koristili dva pravila deriviranja: $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ i $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}} = \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3x^2 \cdot (x^3+1) - (x^3-1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}} \cdot \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3-1)(x^3+1)^3}}$$
$$= \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3-1)(x^3+1)(x^3+1)^2}} = \frac{3x^2}{(x^3+1)\sqrt{(x^3-1)(x^3+1)}}$$
$$= \frac{3x^2}{(x^3+1)\sqrt{x^6-1}}$$

U primjeru d) smo koristili tri pravila deriviranja: $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$, $\left[u[v(x)]\right]' = u'[v(x)] \cdot v'(x)$ i $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

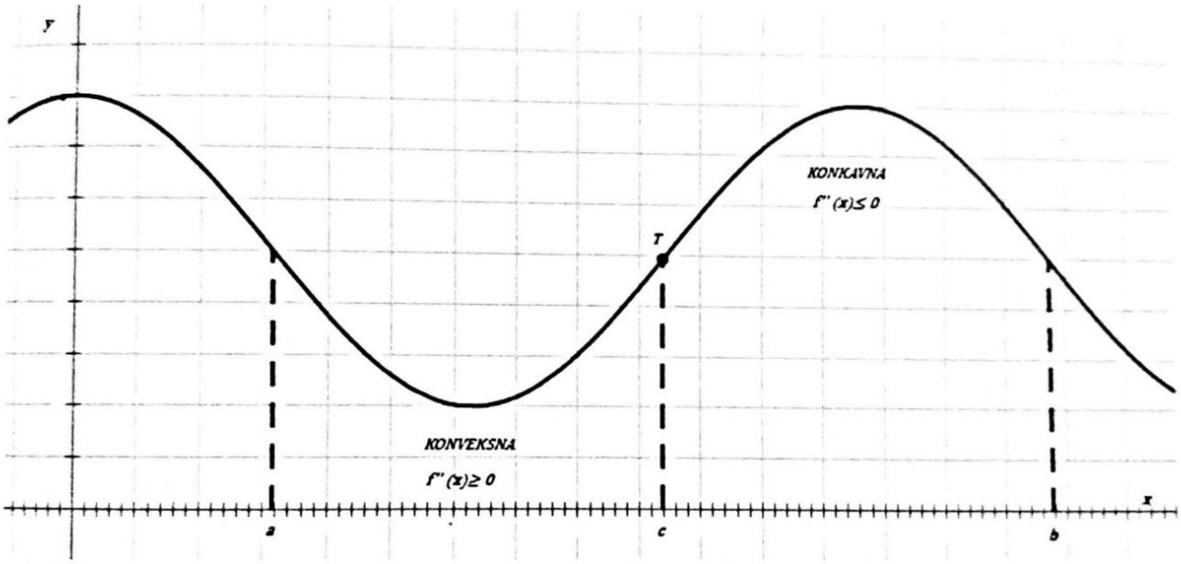
3. PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA U EKONOMIJI

Postoje brojne ekonomske veličine koje omogućuju analiziranje poduzeća te donošenje odluka o daljnjem poslovanju, kao što su: ukupni troškovi proizvodnje, granični troškovi proizvodnje, prosječni troškovi proizvodnje, prihod, dobit ili profit itd. U ekonomiji se pojam derivacije, tj. brzina promjene, odnosi na riječ „granični“ ili „marginalni“. Diferencijalni račun u ekonomiji omogućuje optimizaciju pojedinih ekonomskih veličina, pronalazak marginalnih troškova, prihoda i dobiti, te određivanje elastičnosti funkcija.

3.1. Određivanje tijeka funkcije, crtanje grafa funkcije i optimizacija ekonomskih veličina

Diferencijalni račun se primjenjuje za određivanje tijeka i crtanje grafa neke funkcije.

Slika 2. Konkavnost, konveksnost i točka infleksije



Izvor: Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, *Primjena matematike u gospodarstvu*, Veleučilište u Požegi, Požega 2017., str. 167.

Ako je funkcija $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$, onda vrijedi (slika 2):

a) Funkcija f raste na intervalu $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda funkcija f strogo raste na intervalu $\langle a, b\rangle$.

b) Funkcija f pada na intervalu $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda funkcija f strogo pada na intervalu $\langle a, b\rangle$.[7]

Točka $x = c$ u kojoj vrijedi $f'(c) = 0$ zovemo **stacionarnom točkom** funkcije f.[8] Stacionarna točka predstavlja točku funkcije u kojoj je derivacija te funkcije jednaka 0.

[7] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op. cit., str. 166.
[8] loc. cit.

Točka c je točka lokalnog minimuma funkcije f ako postoji okolina točke c, to jest postoji $O(c)$ tako da za svaki $x \in O(c)$ vrijedi $f(x) \geq f(c)$. Točka c je točka lokalnog maksimuma funkcije f ako postoji okolina točke c, to jest postoji $O(c)$ tako da za svaki $x \in O(c)$ vrijedi $f(x) \leq f(c)$.[9]

Ako je funkcija $f': \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$, onda njezinu derivaciju nazivamo drugom derivacijom funkcije f ili derivacijom drugog reda funkcije f, a označava se f'', $f^{(2)}$ ili $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Analogno tome, postoje derivacije višeg reda: $n - ta$ derivacija funkcije f (derivacija $n - tog$ reda funkcije f) se često označava $f^{(n)}$ ili $\frac{d^n f}{dx^n}$ i definira se sljedećom jednadžbom:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$ [10]

Ako je funkcija $f(x)$ dva puta derivabilna funkcija na nekoj okolini svoje stacionarne točke c, tada vrijedi:

a) Ako je $f''(c) < 0$, onda f ima strogi **lokalni maksimum** u točki c.
b) Ako je $f''(c) > 0$, onda f ima strogi **lokalni minimum** u točki c.[11]

Ako je funkcija $f(x)$ dva puta derivabilna funkcija na intervalu $\langle a, b \rangle$, tada vrijedi:

a) Funkcija $f(x)$ je **konveksna** na $\langle a, b \rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, za svako $x \in \langle a, b \rangle$.
b) Funkcija $f(x)$ je **konkavna** na $\langle a, b \rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$, za svako $x \in \langle a, b \rangle$.[12]

Točku $c \in \langle a, b \rangle$ nazivamo **točkom infleksije** funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u c. Točka infleksije ili pregiba grafa funkcije f je točka u kojoj graf mijenja konkavnost u konveksnost (ili obratno).[13]

---

[9] loc. cit.
[10] Jukić Bokun M., Vježbe iz predavanja *Derivacije višeg reda*, Odjel za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, str. 1, www.mathos.unios.hr/integralni/int_rac_v1_tx.pdf
[11] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 166.
[12] loc.cit.
[13] Beban-Brkić J., Predavanja iz *Matematike 1*, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, str. 140., http://www2.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/12.pdf

Određivanje tijeka i grafa funkcije $y = f(x)$ sastoji se od izračunavanja i određivanja sljedećih osam koraka, iako nije uvijek potrebno primijeniti svih osam koraka:

1) domene D_f i kodomene K_f funkcije f,
2) nultočaka funkcije f,
3) asimptota funkcije f,
4) stacionarnih točaka i intervala monotonosti funkcije f,
5) ekstremnih točaka funkcije f,
6) parnosti i neparnosti funkcije f,
7) konveksnosti i konkavnosti funkcije f,
8) zakrivljenosti.[14]

Primjer 5. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Rješenje:

1) Domena funkcije je skup realnih brojeva $D_f = \mathbb{R}$.
2) Nultočke funkcije izračunavamo iz jednadžbe $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$
$$(x+1)(x^2 + x - 1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \qquad x^2 + x - 1 = 0$$
$$x_1 = -1 \qquad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Funkcija $f(x)$ ima 3 nultočke: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Graf funkcije $f(x)$ siječe *x-os* u točkama $T_1(-1{,}0)$, $T_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ i $T_3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

3) Stacionarne točke i intervale monotonosti računamo tako da funkciju $f(x)$ deriviramo i derivaciju izjednačujemo s 0.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 4x = 0$$
$$x(3x + 4) = 0$$

[14] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 167.

$$x_1 = 0, \qquad 3x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} - 1 = \frac{5}{27}$$

Stacionarne točke su $S_1(0,-1)\ i\ S_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{27}\right)$.

Tablica 2. Prikaz pada i rasta funkcije $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		raste		pada		raste	

Izvor: izrada autora

Iz tablice 2 se vidi da funkcija $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ strogo raste za $x \in \langle -\infty, -\frac{4}{3}\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$, a strogo pada za $x \in \langle -\frac{4}{3}, 0\rangle$.

4) Ekstremne točke se određuju putem dvostruke derivacije $f''(x)$.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$f''(x) = 6x + 4$

$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = -4 < 0 \;\Rightarrow$ u $S_2\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{27}\right)$ funkcija ima lokalni maksimum $M\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{27}\right)$.

$f''(0) = 6 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \;\Rightarrow$ u $S_1(0,-1)$ funkcija ima lokalni minimum $m\ (0,-1)$.

$$f''(x) = 6x + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad 6x = -4 \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{2}{3}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 1 = -\frac{11}{27}$$

Točka infleksije funkcije $f(x)$ je $I\left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{27}\right)$.

5) Zakrivljenost grafa funkcije f(x) je prikazana putem sljedeće tablice:

Tablica 3. Prikaz konkavnosti i konveksnosti funkcije $f(x)$

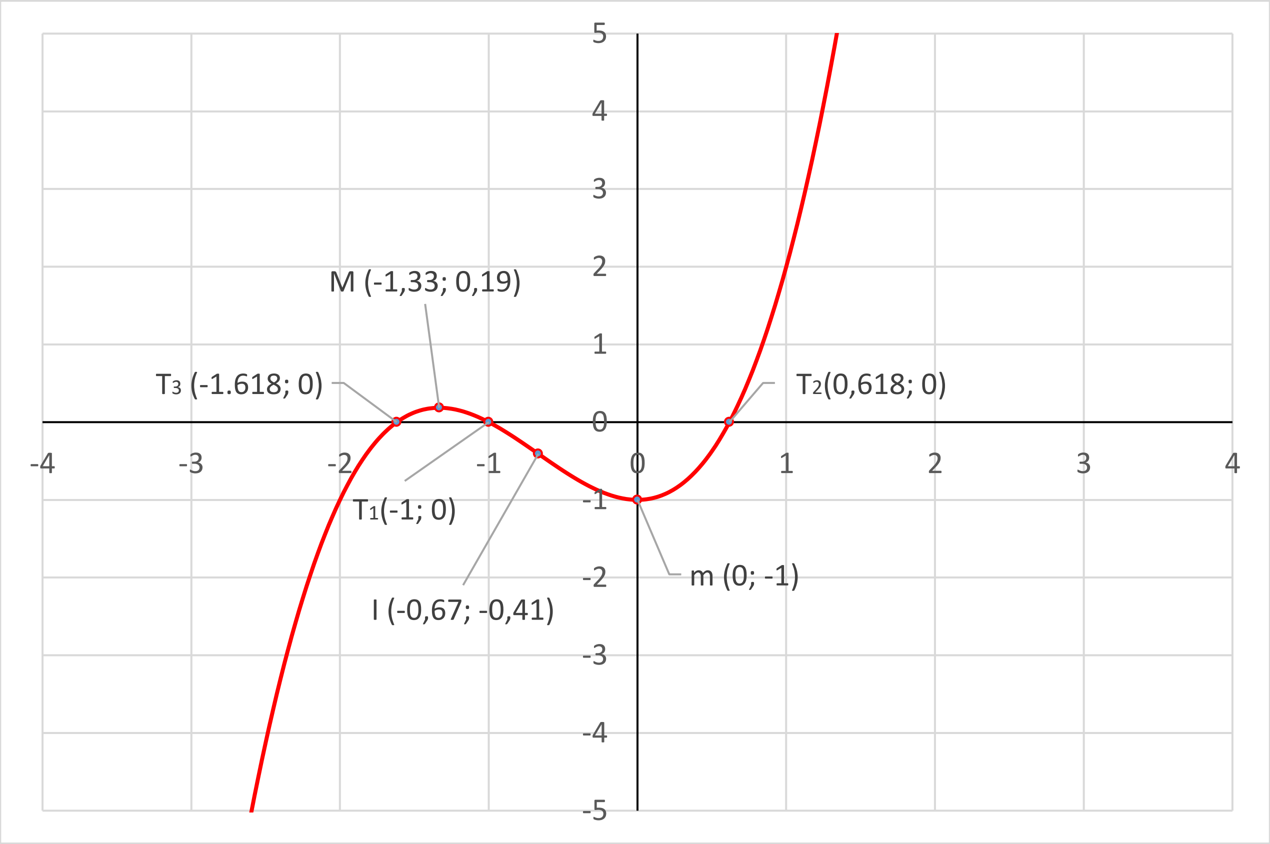
x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

Izvor: izrada autora

Iz tablice 3 se vidi da je funkcija $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ konkavna za $x \in \langle -\infty, -\frac{2}{3} \rangle$, a konveksna za $x \in \langle -\frac{2}{3}, +\infty \rangle$.

6) Na temelju dobivenih izračuna crtamo graf funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ koji je prikazan na sljedećoj slici:

Slika 3. Graf funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$



Izvor: izrada autora u programu Microsoft Excel

U ekonomskom smislu nam ekstremne točke mogu pomoći u određivanju optimuma različitih ekonomskih veličina: npr. maksimizacija dobiti (profita), minimiziranje gubitaka, minimiziranje troškova itd. Navedeno je pokazano primjerom 6.

Primjer 6. Neko poduzeće ima sljedeće funkcije troškova i prihoda koje ovise o količini proizvedenih proizvoda Q:

$$TC(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 400Q + 3000,$$
$$R(Q) = 5000Q - 22Q^2.$$

Odredimo za koju količinu proizvedenih proizvoda Q je dobit P najveća.

Rješenje:

Dobit predstavlja razliku između prihoda i troškova i računa se jednadžbom:

$$P(Q) = R(Q) - TC(Q).$$ [15]

Uvrštavanjem funkcija troškova i prihoda u prethodnu jednadžbu, dobiva se funkcija dobiti:

$$P(Q) = 5000Q - 22Q^2 - (Q^3 - 2Q^2 + 400Q + 3000) = -Q^3 - 20Q^2 + 4600Q - 3000.$$

Tražimo ekstremne točke funkcije dobiti, a započinjemo s određivanjem stacionarnih točaka funkcije dobiti tako da funkciju dobiti deriviramo i derivaciju izjednačujemo s 0.

$$P'(Q) = -3Q^2 - 40Q + 4600 = 0$$
$$Q_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 55200}}{-6}$$
$$Q_1 = -46{,}39 \ , \quad Q_2 = 33{,}05$$
$$P(Q_2 = 33{,}05\,) = -33{,}05^3 - 20 \cdot 33{,}05^2 + 4600 \cdot 33{,}05 - 3000 = 91083{,}35$$

Dobili smo dva rješenja, no rješenje $Q_1 = -46{,}39$ se ne uzima u obzir jer Q mora biti pozitivan. Točka $S(33{,}05; 91083{,}35)$ predstavlja stacionarnu točku.

---

[15] Pašić V., Predavanja iz *Matematike za ekonomiste*, Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Tuzli, str. 57., https://www.docsity.com/sr/matematika-za-ekonomiste-knjiga-pdf/4541510/

Zatim tražimo ekstreme računajući dvostruku derivaciju funkcije dobiti i uvrštavajući stacionarnu točku u dvostruku derivaciju funkcije dobiti:

$$P''(Q) = -6Q - 40,$$

$P''(Q_2 = 33{,}05) = -6 \cdot 33{,}05 - 40 = -238{,}3 < 0 \quad \Rightarrow$ u $S(33{,}05; 91083{,}35)$ funkcija dobiti ima lokalni maksimum $M(33{,}05; 91083{,}35)$.

Poduzeće će imati maksimalnu dobit za količinu proizvedenih proizvoda $Q = 33{,}05$, a maksimalna dobit će iznositi $P(Q = 33{,}05) = 91083{,}35$.

3.2. Marginalni trošak, marginalni prihod i marginalna dobit

Ako je $TC(Q)$ ukupni trošak proizvodnje Q komada proizvoda, onda je $TC'(Q)$ granični trošak, tj. predstavlja trenutačni iznos promjene ukupnog troška $TC(Q)$ s obzirom na broj proizvedenih proizvoda na razinu proizvodnje od Q proizvoda.[16] **Granični trošak** ili **marginalni trošak** još označavamo i oznakom $MC(Q)$. Marginalni trošak se može definirati kao promjena nastalih troškova proizvodnjom dodatne jedinice nekog dobra.[17]

Ako je $TC(Q)$ funkcija troškova, odnosno funkcija količine proizvedenih jedinica Q, marginalni trošak je, matematički gledano, derivacija funkcije troškova po količini proizvedenih jedinica:

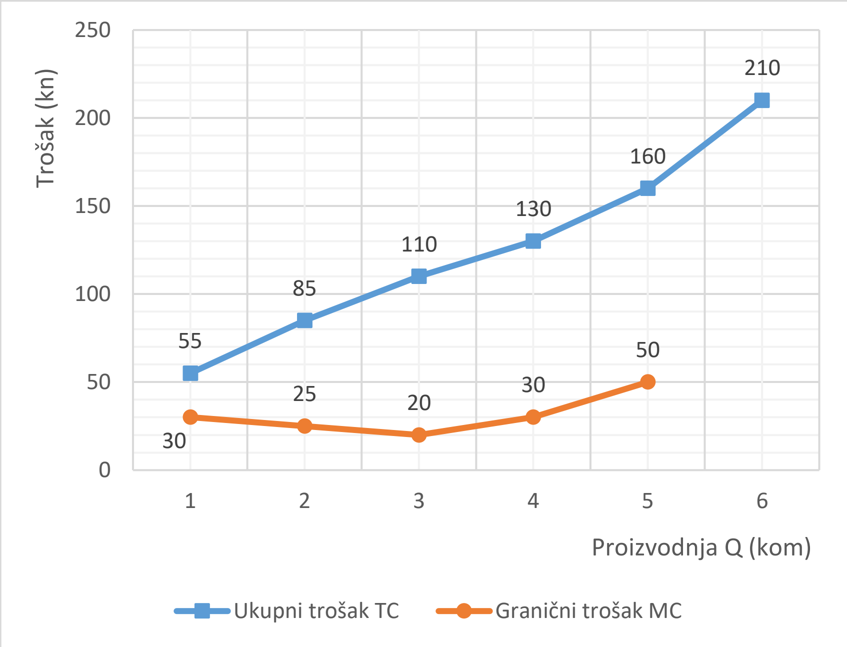
$$MC(Q) = TC'(Q) = \frac{d}{dQ}TC(Q).$$ [18]

Ako se trenutno proizvodi Q komada proizvoda, marginalni trošak nam daje informaciju o približnom porastu troškova proizvodnje koji bi nastao kada bi se proizvodnja povećala za jedan proizvod. Navedeno nam daje sljedeći zapis:

$$C'(Q) \approx C(Q+1) - C(Q).$$ [19]

[16] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 169.
[17] Čičin-Šain D., Predavanje iz *Osnova ekonomije*, Odjel za ekonomiju Sveučilišta u Zadru, str. 2., http://www.unizd.hr/portals/4/nastavni_mat/1_godina/ekonomija/ekonomija_09.pdf
[18] Petrinović M., *Primjene diferencijalnog i integralnog računa*, diplomski rad, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek 2019., str. 8.
[19] loc.cit.

Slika 4. Primjer - ukupni trošak TC i granični trošak MC



Izvor: izrada autora u programu Microsoft Excel

Iz primjera na slici 4 je vidljivo da se pri proizvodnji 3 dodatna komada proizvoda granični trošak smanjuje, a proizvodnjom svakog dodatnog proizvoda nakon toga, granični trošak se povećava.

Ako prosječni troškovi strogo rastu (odnosno padaju) s porastom količine proizvoda, tada su granični troškovi veći (odnosno manji) od prosječnih troškova. Funkcija prosječnih troškova $\overline{TC}(Q)$ se računa kao omjer ukupnih troškova i obujma (količine) proizvodnje.[20]

Primjer 7. Zadana je funkcija ukupnih troškova: $TC(Q) = 20Q^2 + 60Q + 25$. Odredite funkciju prosječnih troškova i funkciju graničnih troškova, te izračunajte ekstrem funkcije prosječnih troškova.

[20] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 169.

Rješenje:

Prvo računamo funkciju prosječnih troškova na sljedeći način:

$$\overline{TC}(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$$

$$\overline{TC}(Q) = \frac{20Q^2 + 60Q + 25}{Q} = 20Q + 60 + \frac{25}{Q}.$$

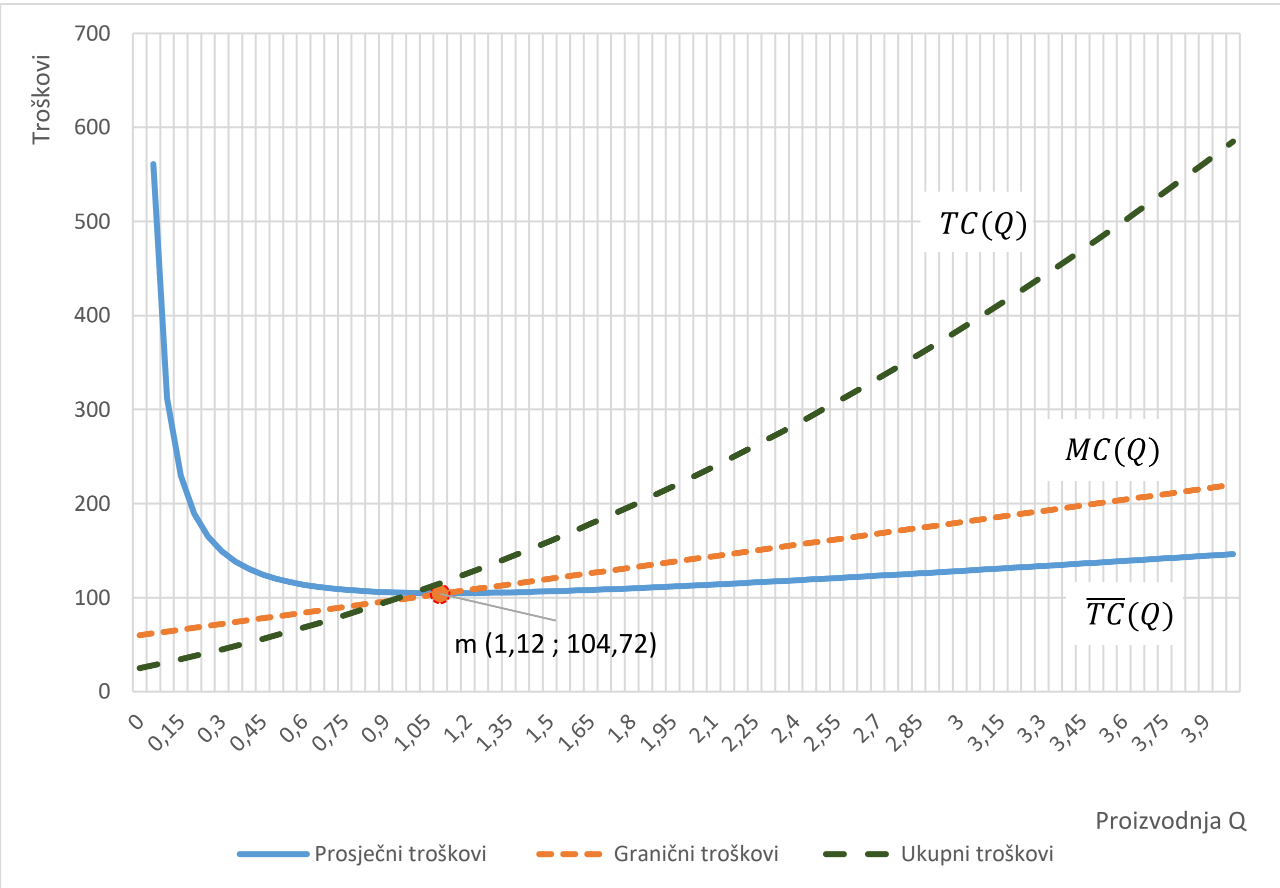
Funkcija graničnih troškova se dobiva tako da se derivira funkcija ukupnih troškova:

$$MC(Q) = TC'(Q) = \frac{d}{dQ}TC(Q)$$

$$MC(Q) = TC'(Q) = 40Q + 60.$$

Slika 5 prikazuje grafove ukupnih troškova $TC(Q)$, prosječnih troškova $\overline{TC}(Q)$ i graničnih troškova $MC(Q)$.

Slika 5. Grafovi funkcija prosječnih troškova i graničnih troškova



Izvor: izrada autora u programu Microsoft Excel

Pošto je varijabla funkcija količina proizvodnje, promatraju se samo pozitivne vrijednosti funkcija u 1. kvadrantu. Funkcije graničnih troškova i prosječnih troškova se sijeku u točki $m\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 104{,}72\right)$ koja ujedno predstavlja minimum funkcije prosječnih troškova. Točka minimuma se računa na sljedeći način:

$$\overline{TC}'(Q) = \left(20Q + 60 + \frac{25}{Q}\right)' = 20 - \frac{25}{Q^2} = 0.$$

Funkciju prosječnih troškova deriviramo i derivaciju izjednačujemo s 0. Rješavanjem dobivene jednadžbe se dobivaju stacionarne točke.

$$20 - \frac{25}{Q^2} = 0 \quad /\cdot Q^2, \qquad Q \neq 0$$

$$20Q^2 - 25 = 0$$

$$Q^2 = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} \qquad /\sqrt{}$$

$$Q_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad Q_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Jedna od dobivenih točaka je negativna, no količina proizvodnje Q ne može biti negativna, stoga se uzima samo pozitivna vrijednost, tj. točka Q_1. Ta točka se uvrštava u funkciju prosječnih troškova:

$$\overline{TC}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 20 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + 60 + \frac{25}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 10\sqrt{5} + 60 + \frac{50}{\sqrt{5}} = 104{,}72$$

Točka $S\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 104{,}72\right)$ predstavlja stacionarnu točku funkcije prosječnih troškova.

Tablica 4. Prikaz pada i rasta funkcije prosječnih troškova

x	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$\overline{TC}'(Q)$	$-$	0	$+$
$\overline{TC}(Q)$	pada		raste

Izvor: izrada autora

Kao što prikazuje tablica 4, funkcija prosječnih troškova strogo pada za $x \in \langle 0, \frac{\sqrt{5}}{2} \rangle$, a strogo raste za $x \in \langle \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty \rangle$.

Ekstremna točka se određuje putem dvostruke derivacije funkcije prosječnih troškova:

$$\overline{TC}''(Q) = \left(20 - \frac{25}{Q^2}\right)' = 2 \cdot \frac{25}{Q^3} = \frac{50}{Q^3}.$$

$\overline{TC}''\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{50}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{400}{(\sqrt{5})^3} = 16\sqrt{5} = 35{,}78 > 0 \quad \Rightarrow$ u $S\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 104{,}72\right)$ funkcija ima lokalni minimum $m\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 104{,}72\right)$.

Na slici 5 se vidi da funkcija prosječnih troškova $\overline{TC}(Q)$ pada na intervalu $\langle 0, \frac{\sqrt{5}}{2} \rangle$. Na tom intervalu su granični troškovi manji od prosječnih troškova, te se graf graničnih troškova nalazi ispod grafa prosječnih troškova. Na intervalu $\langle \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty \rangle$ prosječni troškovi rastu i granični troškovi su veći od prosječnih troškova (graf graničnih troškova nalazi se iznad grafa prosječnih troškova), te su vrijednosti funkcije graničnih troškova veće od vrijednosti funkcije prosječnih troškova.

Granični prihod ili **marginalni prihod** se dobije deriviranjem funkcije ukupnog prihoda:

$$MR(Q) = R'(Q) = \frac{d}{dQ} R(Q).$$ [21]

Dobit predstavlja razliku između prihoda i troškova. Ukoliko su prihodi veći od troškova, ostvaruje se dobit. Ukoliko su prihodi manji od troškova, ostvaruje se gubitak. Za razliku od prihoda i troškova, dobit može biti negativna. Dobit se računa sljedećom jednadžbom:

$$P(Q) = R(Q) - TC(Q).$$ [22]

---

[21] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 170.
[22] Pašić V., op. cit., str. 57.

Na sličan način kao granični prihod, dobiva se i **granična dobit** ili **marginalna dobit**, kod koje se derivira funkcija ukupne dobiti:

$$MP(Q) = P'(Q) = \frac{d}{dQ}P(Q).$$ [23]

Primjer 8. Odredimo količinu proizvoda za koju se doseže maksimum funkcije dobiti $P(Q)$ i izračunajmo maksimalnu dobit ako je funkcija ukupnih troškova $TC(Q) = Q^2 + 1500$ (gdje je Q količina proizvoda) i zadana je funkcija ukupnog prihoda $R(Q) = 200Q$.

Rješenje:

Funkcija dobiti $P(Q)$ se dobiva razlikom funkcija ukupnog prihoda $R(Q)$ i ukupnih troškova $TC(Q)$:

$$P(Q) = R(Q) - TC(Q)$$
$$P(Q) = 200Q - (Q^2 + 1500) = -Q^2 + 200Q - 1500$$

Maksimum funkcije dobiti $P(Q)$ se dobiva računanjem derivacije funkcije dobiti koja se izjednači s 0:

$$P(Q) = -Q^2 + 200Q - 1500$$
$$MP(Q) = P'(Q) = -2Q + 200$$
$$-2Q + 200 = 0$$
$$2Q = 200$$
$$Q = 100$$

$$P(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 - 1500 \quad \Rightarrow \quad P(Q) = 8500$$

$$M(100, 8500)$$

Maksimum $M(100, 8500)$ funkcije dobiti $P(Q)$ predstavlja stacionarnu točku zadane funkcije dobiti. Znamo da se radi o maksimumu (a ne minimumu) funkcije jer je druga derivacija funkcije dobiti $P(Q)$ manja od 0: $P''(Q) = -2 < 0$.

[23] Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, op.cit., str. 170.

3.3. Elastičnost potražnje

Elastičnost predstavlja sposobnost neke ekonomske veličine da se mijenja promjenom neke druge ekonomske veličine o kojoj zavisi. Elastičnost se mjeri ili u jednoj točki ili na nekom intervalu. [24]

Koeficijent elastičnosti funkcije y u točki x je omjer relativne promjene vrijednosti funkcije y i relativne promjene nezavisne varijable x. Što je relativna promjena funkcije prema relativnoj promjeni varijable veća, to je funkcija elastičnija, a pri tome vrijedi pretpostavka da je promjena varijable x beskonačno mala, tj. vrijedi $\Delta x \to 0$. Koeficijent elastičnosti predstavlja postotnu promjenu y uz pretpostavku da se veličina x povećala za 1%.[25] Koeficijent elastičnosti se može prikazati sljedećom formulom:

$$E_{y,x} = \frac{\text{relativna promjena od } y}{r\text{elativna promjena od } x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\Delta y}{y\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Skraćeno, koeficijent elastičnost funkcije y u točki x se računa na sljedeći način:

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$ [26]

Vrijede i određena pravila za koeficijent elastičnosti:

1) Funkcija y je u nekoj točki <u>elastična</u> ako u toj točki vrijedi $|E_{y,x}| > 1$.
2) Funkcija y je u nekoj točki <u>neelastična</u> ako u toj točki vrijedi $|E_{y,x}| < 1$.
3) Funkcija y je u nekoj točki <u>jedinično elastična</u> ako u toj točki vrijedi $|E_{y,x}| = 1$.
4) Funkcija y je u nekoj točki <u>savršeno elastična</u> ako u toj točki vrijedi $|E_{y,x}| = \infty$.
5) Funkcija y je u nekoj točki <u>savršeno neelastična</u> ako u toj točki vrijedi $|E_{y,x}| = 0$.[27]

Kao dobar primjer elastičnosti u ekonomiji se može uzeti **elastičnost potražnje**. Ako je $Q = f(p)$ funkcija potražnje koja ovisi o cijeni p, tada elastičnost potražnje definiramo kao:

[24] ibidem, str. 173.
[25] loc. cit.
[26] loc. cit.
[27] loc.cit.

$$E_d = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}.$$ [28]

Sukladno pravilima elastičnosti koja su navedena na prethodnoj stranici, za elastičnost potražnje možemo zaključiti sljedeća pravila:

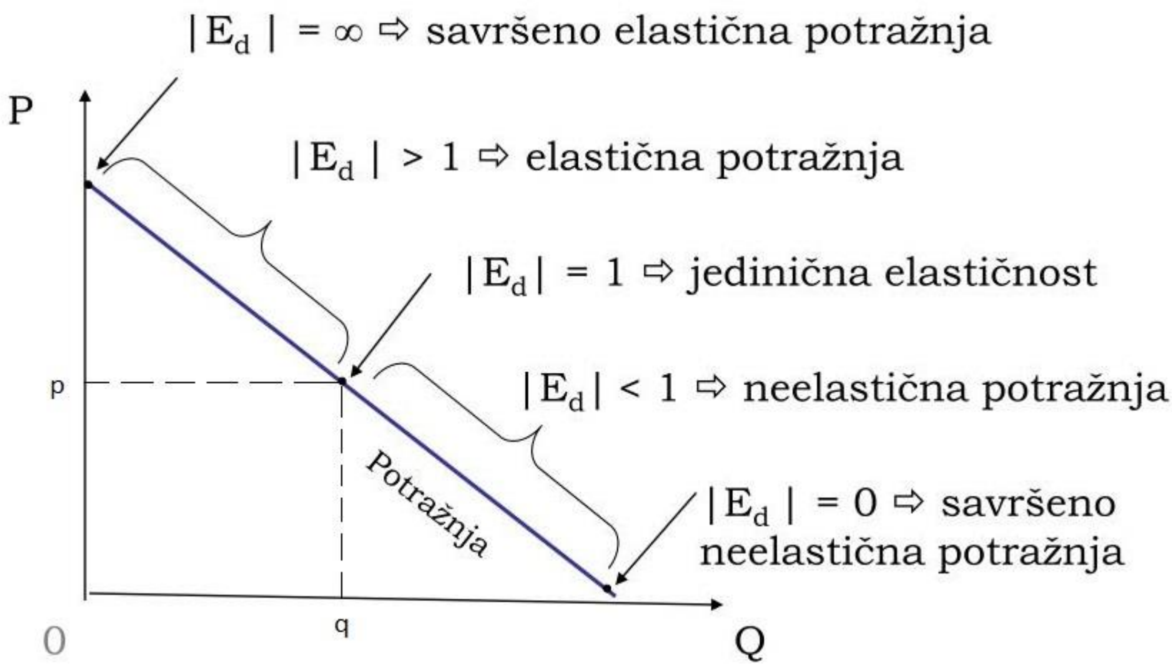
1) Potražnja je <u>elastična</u>, tj. povećanje cijena će voditi smanjenju potražnje ako vrijedi $|E_d| > 1$. Potrošači jako reagiraju na promjene cijena. Tražena količina pada ili raste za veći postotak od postotka rasta ili pada cijene. Primjeri dobara kod kojih je potražnja elastična su: dobra koja imaju lako dostupne supstitute, posebno kada je konkurencija velika, npr. kruh, pecivo, pića itd.
2) Potražnja je <u>neelastična</u>, tj. povećanje cijena će voditi povećanju potražnje ako vrijedi $|E_d| < 1$. Potrošači slabo reagiraju na promjene cijena. Tražena količina pada ili raste za manji postotak od postotka rasta ili pada cijene. Primjeri dobara kod kojih je potražnja neelastična su: dobra koja nije lako supstituirati, posebno u kratkom roku, a esencijalno su potrebna, npr. energija, nafta, energenti itd.
3) Potražnja je <u>jedinično elastična</u>, odnosno relativne promjene količine i cijena su jednake ako vrijedi $|E_d| = 1$, tj. tražena količina pada ili raste za isti postotak za koji cijena poraste ili padne.
4) Potražnja je <u>savršeno elastična</u>, odnosno i najmanje relativno povećanje cijena izaziva beskonačno veliko smanjenje tražene količine ako vrijedi $|E_d| = \infty$. Potrošači reagiraju čak i na najmanju promjenu cijene: ako se cijena poveća i za diferencijalno mali postotak, potrošači potpuno prestaju kupovati proizvod. Ekstremno veliku elastičnost imaju dobra koja potrošaču nisu važna, i može ih se vrlo lako odreći, bez ikakvih važnih ekonomskih posljedica: npr. tiskane novine u doba interneta, kazete, diskete itd.
5) Potražnja je <u>savršeno neelastična</u>, odnosno količina ne reagira na promjene cijena bez obzira na to kolike one bile ako vrijedi $|E_d| = 0$. Potrošači uopće ne reagiraju na promjene cijena, već uvijek traže istu količinu. Primjeri dobara kod kojih je potražnja savršeno neelastična su: esencijalno potrebna dobra bez

[28] Petrinović M., op. cit., str. 11.

mogućnosti supstitucije u kratkom roku, npr. plin za grijanje, električna energija, itd.[29]

Gore navedena pravila elastičnosti potražnje su prikazana na slici 6.

Slika 6. Elastičnost potražnje



Izvor: https://www.slideserve.com/neva/ponuda-i-potra-nja

Elastičnost potražnje nam daje informaciju o tome za koliki postotak će se potražnja smanjiti, ako cijena poraste za 1%. Na primjer, ako se pri porastu cijene od 1% količina smanji za 0,5%, tada je potražnja neelastična.[30]

Također je važno uzeti u obzir razliku između nagiba pravca i elastičnosti krivulje. Nagib pravca ovisi o apsolutnim promjenama vrijednosti cijena i količine, dok elastičnost ovisi o relativnim (postotnim) vrijednostima cijene i količine.[31]

[29] Sabolić D., Bilješke s predavanja *Karakteristike ponude i potražnje*, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2013., https://bib.irb.hr/datoteka/623120.Inzeko03_Karakteristike_ponude_i_potraznje_130324.pdf
[30] Šego B., *Matematika za ekonomiste*, 2. izmijenjeno izdanje, Narodne novine d.d., Zagreb 2005., str. 445.
[31] Polovina S., Predavanja iz *Primjene ponude i potražnje*, www.scribd.com/presentation/346692758/04-Primjena-Ponude-i-Potraznje

Primjer 9. Zadana je funkcija potražnje $Q(p) = -p^2 + 15$. Izračunajmo koeficijent elastičnosti funkcije potražnje na nivou cijena $p = 2$. Interpretirajmo rezultat.

Rješenje:

$$E_d = \frac{p}{Q} \cdot Q'(p) = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{-p^2 + 15} \cdot (-2p) = \frac{-2p^2}{-p^2 + 15}$$

$$E_d(p = 2) = \frac{-2 \cdot 4}{-4 + 15} = \frac{-8}{11} = -0{,}73$$

Kada cijena iznosi $p = 2$ i cijenu povećamo za 1% njezine vrijednosti, potražnja će se smanjiti za približno 0,73%, što dokazuje i sljedeći izračun:

$$Q(2) = -2^2 + 15 = -4 + 15 = 11$$

$$Q(2{,}02) = -2{,}02^2 + 15 = -4{,}0804 + 15 = 10{,}9196$$

$$\frac{Q(2{,}02)}{Q(2)} \cdot 100 - 100 = \frac{10{,}9196}{11} \cdot 100 - 100 = 99{,}2691 - 100 = -0{,}73\%$$

Primjer 10. Zadana je funkcija ukupnih troškova $TC(q) = 4q + 7$. Odredite koeficijent elastičnosti ukupnih troškova za $q = \frac{7}{4}$. Interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$E_{TC} = \frac{q}{TC} \cdot TC'(q) = \frac{q}{TC} \cdot \frac{dTC}{dq} = \frac{q}{4q + 7} \cdot 4 = \frac{4q}{4q + 7}$$

$$E_{TC}\left(q = \frac{7}{4}\right) = \frac{4 \cdot \frac{7}{4}}{4 \cdot \frac{7}{4} + 7} = \frac{7}{7 + 7} = 0{,}5$$

Kada količina iznosi $q = \frac{7}{4}$ i količinu povećamo za 1% njezine vrijednosti, ukupni troškovi će se povećati za 0,5%, što dokazuje i sljedeći izračun:

$$TC\left(\frac{7}{4}\right) = 4 \cdot \frac{7}{4} + 7 = 14, \quad TC\left(\frac{707}{400}\right) = 4 \cdot \frac{707}{400} + 7 = 14{,}07,$$

$$\frac{TC\left(\frac{707}{400}\right)}{TC\left(\frac{7}{4}\right)} \cdot 100 - 100 = \frac{14{,}07}{14} \cdot 100 - 100 = 100{,}5 - 100 = 0{,}5\%.$$

4. PARCIJALNA DERIVACIJA

4.1. Pojam parcijalne derivacije

„Klasične“ derivacije koje smo obradili u prethodnom poglavlju se primjenjuju za funkcije jedne varijable. Ako promatramo točku na nekom pravcu, ona se može opisati funkcijom $f(x)$ koja nam daje vrijednost u ovisnosti o položaju na pravcu i ta funkcija ima jednu varijablu x. No, u stvarnom svijetu se rijetko javljaju pojave sa samo jednom varijablom. U tom slučaju je prikladno koristiti funkcije više varijabli. Ako promatramo točku u nekoj ravnini, ona se može opisati funkcijom $f(x, y)$ koja nam daje vrijednost u ovisnosti o položaju u ravnini i ta funkcija ima dvije varijable x i y. Ako promatramo materijalnu točku u prostoru, ona se može opisati funkcijom $f(x, y, z)$ koja nam daje vrijednost u ovisnosti o položaju u prostoru i ta funkcija ima tri varijable x, y i z. Primjer funkcije više varijabli može biti kada se promatra neka pojava u prostoru koja se kreće kroz vrijeme t (npr. u fizici), pa se tada pojava opisuje funkcijom $g(x, y, z, t)$.

Parcijalna derivacija funkcije $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, koja se označuje y_{x_i} ili f_{x_i} ili $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ ili $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, je granična vrijednost kvocijenta prirasta funkcije y po varijabli x_i i prirasta neovisne varijable x_i kada prirast varijable x_i teži u 0. Dakle vrijedi:

$$y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i} \quad , \quad i \in \{1,2, \dots, n\} \text{ .}$$ [32]

Ako postoji funkcija $z = z(x, y)$ koja ima dvije varijable x i y, onda je parcijalna derivacija funkcije z po varijabli x:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} ,$$

a parcijalna derivacija funkcije z po varijabli y je:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} \text{ .}$$ [33]

---

[32] Šego B., op. cit., str. 462.
[33] ibidem, str. 463.

Tehnika parcijalnog deriviranja funkcije više varijabli se zapravo svodi na „klasično“ deriviranje, jer varijable po kojima se ne derivira smatraju se konstantama. Sva pravila i svojstva parcijalnih derivacija su ista kao i kod „klasičnih“ derivacija.[34]

Primjer 11. Odredimo parcijalne derivacije sljedećih funkcija:

a) $z(x,y) = x^3 \sin y$, b) $z(x,y) = 5x^3 \cdot 4y^2$, c) $z(x,y) = x^y$.

Rješenje:

a) Kada računamo parcijalnu derivaciju funkcije z po varijabli x, tj. parcijalnu derivaciju z_x, varijablu y tretiramo kao konstantu, te samim time i cijeli izraz $\sin y$:

$$z_x = 3x^2 \sin y$$

Kada računamo parcijalnu derivaciju funkcije z po varijabli y, tj. parcijalnu derivaciju z_y, varijablu x tretiramo kao konstantu:

$$z_y = x^3 \cos y$$

b)

$$z_x = 15x^2 \cdot 4y^2 = 60x^2y^2$$

$$z_y = 5x^3 \cdot 8y = 40x^3y$$

c)

$$z_x = y \cdot x^{y-1}$$

$$z_y = x^y \ln x$$

4.2. Parcijalne derivacije višeg reda

Razmatrajući parcijalne derivacije funkcije dviju varijabli $z = z(x,y)$ vidjeli smo da su funkcije z_x i z_y također funkcije dviju varijabli x i y. Općenito vrijedi:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y),$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y),$$

pa se mogu računati parcijalne derivacije funkcija $g(x,y)$ i $h(x,y)$ koje označavamo:

[34] loc. cit.

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x} \; i \; \frac{\partial h}{\partial y} \, .$$ [35]

Vidimo da postoje četiri parcijalne derivacije 2. reda:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial x} \, ,$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial y} \, ,$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} \, ,$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial y} \, .$$ [36]

Parcijalne derivacije 2. reda z_{xy} i z_{yx} nazivamo mješovitim parcijalnim derivacijama 2. reda. Deriviranjem dobivenih parcijalnih derivacija 2. reda, dobivamo parcijalne derivacije 3. reda. Analogno tome se dobivaju derivacije višeg reda. Funkcije z_x i z_y su zapravo parcijalne derivacije 1. reda funkcije $z = z(x, y)$.[37]

Schwarzov teorem govori ako su mješovite parcijalne derivacije neprekinute, onda one ne ovise o redoslijedu varijabli po kojima deriviramo, nego samo o varijablama po kojima se derivira i koliko puta[38], te su prema ovom teoremu mješovite parcijalne derivacije identične. Dakle, za funkciju $z = z(x, y)$ i njene parcijalne derivacije 2. reda vrijedi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \, ,$$

to jest:

$$z_{xy} = z_{yx} \, .$$ [39]

---

[35] ibidem, str. 467.
[36] loc. cit.
[37] loc. cit.
[38] Mićić Hot J., Predavanja i vježbe iz *Funkcije više varijabli*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2019., str. 57., hwww.fsb.unizg.hr/matematika/download/digitalniUdz.pdf
[39] Šego B., op. cit., str. 468.

Primjer 12. Izračunajmo $z_{xy},\ z_{yx},\ z_{xyx}\ i\ z_{xyxy}$ za funkciju $z(x,y) = xy^2 + (x+5y)^3$.

Rješenje:

$$z_x = y^2 + 3(x+5y)^2$$

$$z_y = 2xy + 3(x+5y)^2 \cdot 5 = 2xy + 15(x+5y)^2$$

$$z_{xy} = 2y + 6(x+5y) \cdot 5 = 2y + 30(x+5y) = 2y + 30x + 150y = 30x + 152y$$
$$z_{yx} = 2y + 30(x+5y) = 2y + 30x + 150y = 30x + 152y$$

Prema Schwarzovom teoremu vrijedi $z_{xy} = z_{yx}$, što je i dokazano gore navedenim izračunom.

$$z_{xyx} = 30$$
$$z_{xyxy} = 0$$

5. PRIMJENA PARCIJALNE DERIVACIJE U EKONOMIJI

5.1. Ekstremi funkcija više varijabli i optimizacija ekonomskih veličina

Parcijalne derivacije višeg reda mogu služiti za pronalazak i određivanje ekstrema funkcija više varijabli. Funkcija dviju varijabli $z = z(x,y)$ ima **lokalni maksimum** u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve točke (x,y) iz te okoline vrijedi $z(x_0,y_0) \geq z(x,y)$. Funkcija z ima **globalni maksimum** u točki (x_0,y_0) ako vrijedi $z(x_0,y_0) \geq z(x,y)$ za sve točke (x,y) iz domene funkcije z. Funkcija dviju varijabli $z = z(x,y)$ ima **lokalni minimum** u točki (x_0,y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve točke (x,y) iz te okoline vrijedi $z(x_0,y_0) \leq z(x,y)$. Funkcija z ima **globalni minimum** u točki (x_0,y_0) ako vrijedi $z(x_0,y_0) \leq z(x,y)$ za sve točke (x,y) iz domene funkcije z. [40]

[40] Baranović I. i M. Jerković, Vježbe iz *Matematike 2*, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije Sveučilišta u Zagrebu, str.1., http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%202/vjezbe/Mat2_Vjezbe9.pdf

Postupak pronalaska ekstrema kod funkcija dviju varijabli je složeniji nego kod funkcija jedne varijable. Prvo se traže kritične točke koje predstavljaju točke kandidate za lokalne ekstreme.[41] Nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema glasi: ako funkcija z ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako postoje parcijalne derivacije 1. reda u toj točki, onda mora vrijediti:

$$z_x(x_0, y_0) = 0,$$
$$z_y(x_0, y_0) = 0.$$ [42]

Kako bi se pronašle sve točke u kojima se, s obzirom na gornji uvjet, uopće može postići lokalni ekstrem, rješava se gore navedeni sustav jednadžbi. Točke koje zadovoljavaju ovaj sustav jednadžbi predstavljaju kritične točke među kojima se zatim traže lokalni ekstremi. Nakon pronalaska svih kritičnih točaka, utvrđuje se koje od tih točaka su lokalni maksimum ili lokalni minimum, za što je potrebno izračunati vrijednosti parcijalnih derivacija 2. reda u kritičnim točkama. [43]

Za određivanje lokalnog ekstrema se koristi determinanta tzv. Hesseove matrice. Hesseova matrica je matrica čiji elementi su parcijalne derivacije 2. reda funkcije z i prikazuje se na sljedeći način:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix},$$

a pošto prema Schwarzovom teoremu vrijedi $z_{xy} = z_{yx}$, radi se o simetričnoj matrici:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix}.$$ [44]

Determinanta Hesseove matrice nam pomaže u određivanju lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabli, a računa se na sljedeći način:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta := AC - B^2.$$ [45]

Za svaku pojedinu kritičnu točku (x_0, y_0) funkcije $z = z(x, y)$ označavamo:

---

[41] Mićić Hot J., op. cit., str. 83.
[42] Baranović I. i M. Jerković, op. cit., str. 1.
[43] loc. cit.
[44] Šego B., op. cit., str. 469.
[45] Baranović I. i M. Jerković, op. cit., str. 2.

$$A := z_{xx}(x_0, y_0), \quad B := z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0), \quad C := z_{yy}(x_0, y_0).$$

Ako za kritičnu točku (x_0, y_0) funkcije $z = z(x, y)$ vrijedi:

1) $\Delta > 0$, onda se u kritičnoj točki (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:
    a) lokalni maksimum ako je $A < 0$,
    b) lokalni minimum ako je $A > 0$,
2) $\Delta < 0$, onda funkcija $z = z(x, y)$ ne postiže ekstrem u točki (x_0, y_0), već se točka (x_0, y_0) naziva sedlastom točkom,
3) $\Delta = 0$, onda se ne može doći do zaključka o tome ima li funkcija $z = z(x, y)$ u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili nema, već treba dalje ispitivati ponašanje funkcije. [46]

Primjer 13. Odredimo lokalne ekstreme funkcije $z(x, y) = 2xy - 2x^4 - 2y^4$.

Rješenje:

Računamo parcijalne derivacije 1. reda, te zatim rješavamo sustav jednadžbi $z_x(x, y) = 0$ i $z_y(x, y) = 0$.

$$z_x(x, y) = 2y - 8x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = 8x^3 \quad \Rightarrow \quad y = 4x^3$$

$$z_y(x, y) = 2x - 8y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8y^3 \quad \Rightarrow \quad x = 4y^3$$

Uvrštavanjem $y = 4x^3$ u drugu jednadžbu dobivamo:

$$2x - 8 \cdot (4x^3)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 32x^9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 16x^9 = 0$$

Dalje jednadžbu rješavamo faktoriziranjem:

$$x - 16x^9 = 0$$

$$16x^9 - x = 0$$

$$x(16x^8 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \qquad 16x^8 - 1 = 0$$

$$x^8 = \frac{1}{16} \quad / \sqrt[8]{}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

[46] loc. cit.

Dobivena rješenja uvrštavamo u jednadžbu $y = 4x^3$:

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2}\,, \qquad y_3 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\sqrt{2}\,.$$

Kritične točke (kandidati za ekstreme) glase: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

Kako bismo utvrdili koje od ovih kritičnih točaka predstavljaju lokalne ekstreme funkcije, prvo trebamo utvrditi parcijalne derivacije 2. reda funkcije $z(x, y) = 2xy - 2x^4 - 2y^4$:

$$z_{xx}(x, y) = -24x^2\,,$$
$$z_{xy}(x, y) = z_{yx}(x, y) = 2,$$
$$z_{yy}(x, y) = -24y^2.$$

Računamo determinantu Hesseove matrice na način da vrijednosti svake kritične točke uvrštavamo u parcijalne derivacije 2. reda i time dobivamo vrijednost determinante:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} z_{xx}(x, y) & z_{xy}(x, y) \\ z_{yx}(x, y) & z_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}, \qquad \Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

a) $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ funkcija ne postiže ekstrem u točki $(0,0)$ i tu točku nazivamo sedlastom točkom.

b) $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -48 \end{bmatrix}$, $\Delta = -12 \cdot (-48) - 2 \cdot 2 = 572 > 0 \quad \Rightarrow$ funkcija postiže lokalni ekstrem, i to maksimum, u točki $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ iznosi $z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = -\frac{13}{2}$.

c) $H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -48 \end{bmatrix}$, $\Delta = -12 \cdot (-48) - 2 \cdot 2 = 572 > 0 \quad \Rightarrow$ funkcija postiže lokalni ekstrem, i to maksimum, u točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ iznosi $z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{13}{2}$.

Analogno optimizaciji ekonomskih veličina kod funkcija jedne varijable, u ekonomskom smislu ekstremne točke funkcija više varijabli mogu pomoći u određivanju optimuma različitih ekonomskih veličina: npr. maksimizacija dobiti (profita), minimiziranje gubitaka, minimiziranje troškova itd. Navedeno je pokazano primjerom 14.

Primjer 14. Poduzeće proizvodi dva proizvoda: proizvod A u količini Q_1 i proizvod B u količini Q_2, te ima funkciju dobiti prikazanu sljedećom jednadžbom:

$$P(Q_1, Q_2) = 128Q_1 - 4{Q_1}^2 + 8Q_1Q_2 - 8{Q_2}^2 + 64Q_2 - 28.$$

Odredimo za koju količinu proizvoda A, odnosno za koju količinu proizvoda B je dobit poduzeća najveća i koliko ona iznosi.

Rješenje:

Računamo parcijalne derivacije 1. reda i rješavamo sustav jednadžbi $P_{Q_1}(Q_1, Q_2) = 0$ i $P_{Q_2}(Q_1, Q_2) = 0$.

$$P_{Q_1}(Q_1, Q_2) = \frac{\partial P}{\partial Q_1} = 128 - 8Q_1 + 8Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 - Q_1 + Q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 - 16$$

$$P_{Q_2}(Q_1, Q_2) = \frac{\partial P}{\partial Q_2} = 8Q_1 - 16Q_2 + 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 - 2Q_2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 2Q_2 - 8$$

Rješavamo sustav jednadžbi uvrštavanjem jednadžbe $Q_1 = 2Q_2 - 8$ u jednadžbu $Q_2 = Q_1 - 16$:

$$\begin{aligned} Q_2 &= 2Q_2 - 8 - 16 \\ Q_2 &= 24 \\ Q_1 &= 2 \cdot 24 - 8 = 40 \end{aligned}$$

Kritična točka (kandidat za ekstrem) glasi: $(40,24)$.

Kako bismo utvrdili da li ova kritična točka predstavlja lokalni ekstremi funkcije, prvo trebamo utvrditi parcijalne derivacije 2. reda funkcije dobiti:

$$P_{Q_1Q_1}(Q_1, Q_2) = \frac{\partial^2 P}{\partial {Q_1}^2} = -8,$$

$$P_{Q_1Q_2}(Q_1, Q_2) = P_{Q_2Q_1}(Q_1, Q_2) = \frac{\partial^2 P}{\partial Q_2 Q_1} = \frac{\partial^2 P}{\partial Q_1 Q_2} = 8,$$

$$P_{Q_2Q_2}(Q_1, Q_2) = \frac{\partial^2 P}{\partial {Q_2}^2} = -16.$$

Računamo determinantu Hesseove matrice na način da koordinate kritične točke uvrštavamo u parcijalne derivacije 2. reda i time dobivamo vrijednost determinante:

$$H(Q_1, Q_2) = \begin{bmatrix} P_{Q_1Q_1}(Q_1, Q_2) & P_{Q_1Q_2}(Q_1, Q_2) \\ P_{Q_2Q_1}(Q_1, Q_2) & P_{Q_2Q_2}(Q_1, Q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}, \quad \Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

$H(40{,}24) = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -16 \end{bmatrix}$, $\Delta = -8 \cdot (-16) - 8 \cdot 8 = 64 > 0$ $\Rightarrow$ funkcija dobiti postiže lokalni ekstrem, i to maksimum, u točki $(40{,}24)$, jer je $A = -8 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(40{,}24)$ iznosi $P(40{,}24) = 3300$.

Dobit poduzeća je najveća za 40 komada proizvoda A i 24 komada proizvoda B, a dobit iznosi $P(40{,}24) = 3300$.

5.2. Marginalni trošak, marginalni prihod i marginalna dobit

U ranijem poglavlju smo promatrali marginalni trošak, marginalni prihod i marginalnu dobit kao funkcije vezane za količinu jednog dobra, a u ovom poglavlju promatramo marginalni trošak, marginalni prihod i marginalnu dobit kao funkcije vezane za proizvodnju više proizvoda.

Pretpostavimo da se proizvodi $n \in N$ proizvoda i neka je Q_i, $i = 1, \dots, n$ količina proizvedenog i-tog proizvoda. Također, $TC(Q_1, \dots, Q_n)$ je funkcija troškova, $R(Q_1, \dots, Q_n)$ je funkcija prihoda, a $P(Q_1, \dots, Q_n)$ je funkcija dobiti.

Marginalni trošak proizvodnje i-tog proizvoda, oznake MC_i, definira se kao parcijalna derivacija funkcije troškova po količini Q_i, a zapisuje se kao:

$$MC_i(Q_1, \dots, Q_n) = \frac{\partial TC}{\partial Q_i} \text{ .}^{47}$$

Marginalni prihod proizvodnje i-tog proizvoda, oznake MR_i, definira se kao parcijalna derivacija funkcije prihoda po količini Q_i, a zapisuje se kao:

$$MR_i(Q_1, \dots, Q_n) = \frac{\partial R}{\partial Q_i} \text{ .}^{48}$$

Marginalna dobit proizvodnje i-tog proizvoda, oznake MD_i, definira se kao parcijalna derivacija funkcije dobiti po količini Q_i, a zapisuje se kao:

$$MP_i(Q_1, \dots, Q_n) = \frac{\partial P}{\partial Q_i} \text{ .}^{49}$$

Primjer 15. Poduzeće se bavi proizvodnjom dvaju proizvoda s količinama Q_1 i Q_2, a funkcije troškova i prihoda glase:

$$TC(Q_1, Q_2) = {Q_1}^3 + Q_1 Q_2 + 2{Q_2}^3$$
$$R(Q_1, Q_2) = {Q_1}^3 + 6{Q_2}^3 + 500.$$

Odredimo funkcije marginalnog troška i marginalnog prihoda za proizvod Q_2.

Rješenje:

$$MC_2(Q_1, Q_2) = \frac{\partial TC}{\partial Q_2} = Q_1 + 6{Q_2}^2$$
$$MR_2(Q_1, Q_2) = \frac{\partial R}{\partial Q_2} = 18{Q_2}^2.$$

5.3. Parcijalna elastičnost potražnje

Uočili smo da je koeficijent elastičnosti $E_{y,x}$ mjera promjene ovisne varijable $y = f(x)$ uzrokovane relativnom promjenom neovisne varijable x. U stvarnom svijetu ekonomske veličine ne ovise samo o jednoj varijabli, već o više njih. Npr. potražnja Q

[47] Pašić V., op. cit., str. 115.
[48] loc. cit.
[49] ibidem, str. 116.

dobra 1 ovisi o cijeni dobra p_1, ali i o cijenama p_2, $p_3, \dots, p_n$ nekih drugih dobara, pa zatim o dohotku k potrošača ili možda vremenu t:

$$Q_1 = f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, k, t).$$[50]

Kada smo promatrali primjenu „klasične“ derivacije kod elastičnosti funkcije, funkcija potražnje je ovisila o cijeni p jednog proizvoda. Primjenom parcijalne derivacije kod elastičnosti potražnje, funkcija potražnje ovisi o n proizvoda, odnosno o njihovim cijenama $p_i, i = 1, \dots, n$. Za funkciju potražnje dobra 1 $Q_1 = f(p_1, \dots, p_n)$, $i - ti$ koeficijent parcijalne elastičnosti se definira kao:

$$E_{Q_1,p_i} = \frac{p_i}{Q_1} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$[51]

Sukladno tome, općenita jednadžba koeficijenta parcijalne elastičnosti za funkciju $y = f(x_1, \dots, x_n)$ glasi:

$$E_{y,x_i} = \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jednadžba se može interpretirati na sljedeći način: E_{y,x_i} govori koliko se posto približno promijeni vrijednost funkcije y na nekoj razini varijabli funkcije y, ako se varijabla x_i (po kojoj se parcijalno derivira funkcija y) poveća za 1%, a ostale varijable o kojima funkcija y ovisi ostanu nepromijenjene.[52]

Primjer 16. Ako je zadana funkcija potražnje nekog dobra A:

$$Q_A(p_A, p_B) = 100 - 5p_A + 8p_B,$$

gdje je p_A cijena dobra A, a p_B cijena nekog dobra B, izračunajmo koeficijent parcijalne elastičnosti na razini cijena $p_A = 10$ i $p_B = 5$. Interpretirajmo rezultat.

[50] Šego B., op. cit., str. 469.
[51] ibidem, str. 470.
[52] Horvatić V., Vježbe uz kolegij Matematika, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, str. 141., http://www.efzg.unizg.hr/UserDocsImages/MAT/vhorvatic/Vjezbe.pdf

Rješenje:

$$E_{Q_A,p_A} = \frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A} = \frac{p_A}{100 - 5p_A + 8p_B} \cdot (-5) = \frac{-5p_A}{100 - 5p_A + 8p_B}$$

$$E_{Q_A,p_A}(p_A = 10, p_B = 5) = \frac{-5 \cdot 10}{100 - 5 \cdot 10 + 8 \cdot 5} = \frac{-50}{90} = -0{,}5\dot{5}$$

Rezultat možemo interpretirati kao sljedeće: ako se cijena dobra A poveća za 1% (na razini cijena $p_A = 10$ i $p_B = 5$), onda se potražnja dobra A smanjii za $0{,}5\dot{5}\%$.

$$p_A \uparrow 1\% \text{ (na razini cijena } p_A = 10, p_B = 5) \quad \Rightarrow \quad Q_A \downarrow 0{,}5\dot{5}\% \,.$$

Rezultat možemo dokazati i sljedećim izračunom:

$$Q_A(p_A = 10, p_B = 5) = 100 - 5 \cdot 10 + 8 \cdot 5 = 90$$

$$Q_A(p_A = 10{,}1;\ p_B = 5) = 100 - 5 \cdot 10{,}1 + 8 \cdot 5 = 89{,}5$$

$$\frac{Q_A(p_A = 10{,}1;\ p_B = 5)}{Q_A(p_A = 10, p_B = 5)} \cdot 100 - 100 = \frac{89{,}5}{90} \cdot 100 - 100 = -0{,}5\dot{5}\%.$$

6. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu obrađena je tematika diferencijalnog računa i primjena derivacija u ekonomiji. U teorijskom prikazu derivacija, prikazuje se kako se određuje tangenta na krivulju i navode se pravila deriviranja i derivacije elementarnih funkcija koje služe kao podloga za rješavanje drugih, kompleksnijih derivacija funkcija. U nastavku se pokazuje kako se računanjem derivacije može odrediti tijek funkcije i nacrtati graf iste funkcije. Deriviranjem se može odrediti minimum i maksimum funkcije, te točka infleksije. Diferencijalni račun se u ekonomiji primjenjuje za određivanje optimizacije ekonomskih veličina i određivanje vrlo bitnih pojmova u ekonomiji: marginalnog troška, marginalnog prihoda, marginalne dobiti, te elastičnosti funkcije, a u ovom završnom radu obrađena je elastičnost potražnje. Na isti način kako je obrađen „klasični“ diferenecijalni račun, obrađena je i parcijalna derivacija. Parcijalna derivacija je bitna za „stvarni“ svijet, pošto se u stvarnosti javljaju funkcije više varijabli, za razliku od „klasične“ derivacije koja se koristi kod funkcija jedne varijable. Zaključno, ovim završnim radom pokazano je da su matematika i ekonomija vrlo povezane znanosti, te je diferencijalni račun jedan od dokaza takve izjave.

LITERATURA

1. Baranović I. i M. Jerković, Vježbe iz Matematike 2, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije Sveučilišta u Zagrebu, dostupno na: http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%202/vjezbe/Mat2_Vjezbe9.pdf
2. Beban-Brkić J., Predavanja iz *Matematike 1*, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, dostupno na: http://www2.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/12.pdf
3. Čičin-Šain D., Predavanje iz *Osnova ekonomije*, Odjel za ekonomiju Sveučilišta u Zadru, dostupno na: www.unizd.hr/portals/4/nastavni_mat/1_godina/ekonomija/ekonomija_09.pdf
4. Gusić I., Lekcije iz *Matematike 1*, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije Sveučilišta u Zagrebu, dostupno na: www.matematika.fkit.hr/novo/matematika%201/predavanja/Mat1_Lekcija12.pdf
5. Halusek V., Radišić B. i M. Špoljarić, *Primjena matematike u gospodarstvu,* Veleučilište u Požegi, Požega 2017.
6. Horvatić V., Vježbe uz kolegij *Matematika*, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, dostupno na: http://www.efzg.unizg.hr/UserDocsImages/MAT/vhorvatic/Vjezbe.pdf
7. Jukić Bokun M., Vježbe iz predavanja *Derivacije višeg reda*, Odjel za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, dostupno na: www.mathos.unios.hr/integralni/int_rac_v1_tx.pdf
8. Mićić Hot J., *Funkcije više varijabli, predavanja i vježbe*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2019., dostupno na: www.fsb.unizg.hr/matematika/download/digitalniUdz.pdf
9. Pašić V., *Matematika za ekonomiste, skripta za predavanja*, Prirodno-matematički fakultet Sveučilišta u Tuzli, Tuzla 2015., dostupno na: http://www.pmf.untz.ba/vedad/ekon/ekon2015.pdf
10. Petrinović M., *Primjene diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji, diplomski rad*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek 2019.
11. Polovina S., Predavanja iz *Primjene ponude i potražnje*, dostupno na: www.scribd.com/presentation/346692758/04-Primjena-Ponude-i-Potraznje
12. Sabolić D., Bilješke s predavanja *Karakteristike ponude i potražnje*, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2013., dostupno na:

https://bib.irb.hr/datoteka/623120.Inzeko03_Karakteristike_ponude_i_potraznje_130324.pdf

13. Šego B., *Matematika za ekonomiste*, 2. izmijenjeno izdanje, Narodne novine d.d., Zagreb 2005.
14. Šego B., Škrinjarić T. i V. Kojić, *Odabrana poglavlja matematičke ekonomije,* Ekonomski fakultet Zagreb, Zagreb 2014.

POPIS TABLICA

Tablica 1. Derivacije osnovnih elementarnih funkcija

Tablica 2. Prikaz pada i rasta funkcije $f(x)$

Tablica 3. Prikaz konkavnosti i konveksnosti funkcije $f(x)$

Tablica 4. Prikaz pada i rasta funkcije prosječnih troškova

POPIS SLIKA

Slika 1. Derivacija funkcije $f(x)$

Slika 2. Konkavnost, konveksnost i točka infleksije

Slika 3. Graf funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

Slika 4. Primjer - ukupni trošak TC i granični trošak MC

Slika 5. Grafovi funkcija prosječnih troškova i graničnih troškova

Slika 6. Elastičnost potražnje

SAŽETAK

Zbog pojave pojedinih problema u fizici, biologiji i ekonomiji, javio se razvoj diferencijalnog računa. Diferencijalni račun u ekonomiji daje rješenje o pronalasku tangente na neku krivulju, rješenje o pronalasku brzine neke promjene, te rješenje o pronalasku maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije. Druga rješenja koja diferenecijalni račun daje su pronalazak marginalnog troška, marginalnog prihoda, marginalne dobiti i elastičnosti potražnje. Ovaj završni rad se bavi problematikom diferencijalnog računa i njegovim primjenama u ekonomiji.

Ključne riječi: derivacija, parcijalna derivacija, diferencijalni račun, marginalni trošak, marginalni prihod, marginalna dobit, elastičnost, potražnja, optimizacija

SUMMARY

Due to the occurrence of certain problems in physics, biology and economics, the development of differential calculus has occurred. The differential calculus in economics gives a solution for finding the tangent to a curve, a solution for finding the speed of change, and a solution for finding the maximum and minimum values of a function. Other solutions that differential calculus provides are the finding of marginal cost, marginal revenue, marginal profit, and demand elasticity. This final paper deals with the issue of differential calculus and its applications in economics.

Key words: derivative, partial derivative, differential calculus, marginal cost, marginal revenue, marginal profit, elasticity, demand, optimization