Formiranje geometrijske intuicije istraživanjem vlastite okoline

Car, Nives

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

NIVES CAR

FORMIRANJE GEOMETRIJSKE INTUICIJE ISTRAŽIVANJEM VLASTITE OKOLINE

Diplomski rad

Pula, srpanj 2024.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

NIVES CAR

FORMIRANJE GEOMTRIJSKE INTUICIJE ISTRAŽIVANJEM VLASTITE OKOLINE

Diplomski rad

JMBAG: 03030769286, redovita studentica

Studijski smjer: Integrirani prijeplomski i diplomski sveučilišni Učiteljski studij

Predmet: Metodika nastave matematike 3

Znanstveno područje: Prirodne znanosti

Znanstveno polje: Matematika

Znanstvena grana: Geometrija

Mentor: doc. dr. sc. Siniša Miličić

Pula, srpanj 2024.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisana **Nives Car**, kandidatkinja za **magistru primarnog obrazovanja**, ovime izjavljujem da je ovaj Diplomski rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Diplomskog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Studentica

____

U Puli, 15. srpnja, 2024. godine

IZJAVA

o korištenju autorskog djela

Ja, **Nives Car**, dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj diplomski rad pod nazivom „**Formiranje geometrijske intuicije istraživanjem vlastite okoline**“ koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, 15. srpnja 2024.

Potpis

____

ZAHVALA

Hvala svim profesorima Fakulteta za sva prenesena znanja.

Najiskrenije hvala doc. dr. sc. Siniši Miličiću na reakcijama, motivaciji, prijedlozima, savjetima.

Hvala svim članovima moje obitelji na vjerovanju, strpljenju i podršci, a najviše majci,

ocu i djedu.

Sadržaj

1. Uvod

Matematika je znanost koja je uz nas cijeli život. Gotovo svaki postupak koji obavljamo, svaki trenutak koji proživljavamo, prožet je matematikom, a najčešće u nevidljivom, tajanstvenom obliku koji kao takav ostaje dok ga ne spoznamo. Brojevi koje svaki dan susrećemo, kojima se nerijetko i opterećujemo, sastavni su dio matematike. Međutim, disciplina koja nam pomaže prepoznati, kreirati i oblikovati svijet oko nas naziva se geometrija. Červar, Erceg i Lekić (2014) geometriju vide kao disciplinu u kojoj se vizualiziranjem objekata i konkretnih slika stvara razumijevanje dokaza. Intuicija koju razvijamo prihvatimo li geometriju kao suputnicu nije zanemariva, a upravo nam ona pomaže razmišljati „korak unaprijed"- na koji način stvoriti, u kojim okvirima se smijemo kretati, a iz kojih bi nas okvira mogla izvesti. Kadum (2006) intuiciju definira kao sposobnost predviđanja i shvaćanja prije naknadnih spoznaja i procesa mišljenja.

Ovaj rad predstavlja sistematizaciju geometrijskih sadržaja nastavnog predmeta Matematike ispreplećući se s modelima učenja i razvojnim fazama djeteta, učenika razredne nastave.

Proučavanjem nekoliko autora i dovodeći u svojevrsni sukob njihov pristup poučavanju, odnosno usvajanju gradiva, rad se bavi definicijama geometrijskih pojmova (točka, pravac, dužina, kut, geometrijski likovi i geometrijska tijela, simetrije) s kojima se učenici susreću, a koje treba postupno *nadograđivati* kako bi automatizacija prerasla u intuitivno shvaćanje i primjećivanje. Drugim riječima, rad pomaže shvatiti enkapsulaciju sadržaja Matematike razredne nastave koristeći razne metode, aktivnosti, primjere aktualnih udžbenika, igre i virtualne alate korisne i dostupne učeniku i učitelju 21. stoljeća.

2. GEOMETRIJSKI POJMOVI

Uzmemo li u obzir razvijanje geometrijske intuicije i život djeteta do šeste ili sedme godine kako ga objašnjava Piaget (razdoblje prije polaska u školu), zaključujemo da bi sva djeca, odnosno učenici, trebala imati dobre temelje za savladavanje novih, kompleksnijih sadržaja, misleći pritom na mogućnost povezivanja sadržaja iz puke definicije do prepoznavanja u prostoru. Međutim, u stvarnom svijetu to nije tako i učitelj je toga svjestan, zato sa svim učenicima kreće ispočetka.

Geometrijski sadržaji koje učenici moraju savladati, a što nalaže Kurikulum, u razrednoj nastavi su geometrijska tijela i likovi (kugla, valjak, stožac, kvadar, piramida, trokut, pravokutnik, kvadrat, krug), crte i vrste crta (ravne, zakrivljenje, izlomljene), pojam točke i označavanje točke, dužina, polupravac, odnosi pravaca, polupravaca i dužina, mjerenje duljina dužina, konstruiranje kuta pomoću šestara, pojam kuta, vrste kuta, crtanje trokuta prema zadanim veličinama kuta, opisivanje i konstruiranje kruga s njemu pripadajućim elementima (kružnica, promjer i polumjer), crtanje i konstrukcija geometrijskih likova.

Iako su to pojmovi o kojima govorimo, spominjemo i otvorene i zatvorene crte, ravninu, ali prenošenje dužine. IGSZ pristup govori o važnosti predočavanja elemenata kroz više stupnjeva, a to su iskustvo, govor, slike, znakovi. Budući da se bavimo formiranjem geometrijske intuicije spoznavanjem vlastite okoline, pokažimo kako predočiti učeniku dužinu kroz sva četiri navedena stupnja. Iskustvo učenik može steći prethodno opisanom aktivnošću koju može izvesti i sam. Komad vune može poslužiti kao imitacija „crte koja želi postati dužina”. Učenik treba primiti krajeve vune i napnuti vunu kako bi se ista izravnala. Može ju zalijepiti na papir i označiti krajnje točke naljepnicama i označiti ih slovima, to jest imenovati ih. Djeci je privlačno kada mogu dati ime nekome ili nečemu, pa možemo predložiti označavanje točaka djetetovim inicijalima. Kada dijete pred sobom na papiru ima predodžbu dužine, prelazimo na glasovni dio u kojem opisujemo dužinu i potičemo dijete da opiše što je stvorilo. Dijete uviđa da je dužina ravna crta koja ima dvije točke na svojim krajevima i da svaka točka mora biti istaknuta i imati ime. Sažimamo djetetova opažanja u definiciju dužine kao ravne crte omeđene dvjema krajnjim točkama. Također, možemo „skočiti” natrag na iskustveni dio i na papiru na kojem se nalazi „vunena” dužina istaknuti još dvije crte-jednu zakrivljenu i jednu izlomljenu. Umjesto mjerenja duljine crta, možemo se poslužiti novim komadom vune. Zalijepimo komade vune na novonacrtane crte pomoću ljepljive trake (kao i dužinu). Kada su sve crte prikazane vunom, vunu oprezno odlijepimo i sve tri crte postavimo u neki početni položaj, jednu ispod druge, na način da je vidljivo koji je komad vune najkraći, koji je srednje dug i koji je najduži. Time dijete zaključuje da je dužina i najkraća spojnica dviju točaka. Slikovni dio uključivao bi korištenje geometrijskog pribora u izradi dužine.

Dijete je prethodno uvidjelo da je dužina ravna crta i da ju je potrebno nacrtati ravnalom. Ono u početku može proizvoljno označiti točke i spojiti ih ravnom crtom kako bi dobilo dužinu, a kasnije možemo uključiti označavanje dužine na pravcu, odnosno isticanje dviju točaka na već zadanom pravcu ili crtanje pravca koji prolazi kroz dvije zadane točke između kojih drvenom olovkom u boji može označiti dio pravca koji predstavlja dužinu. Kada je dijete savladalo pojam dužine, automatizmom označava i imenuje točke i prepoznaje dužinu kao dio pravca među dvjema istaknutim točkama, možemo prijeći na zapis. Valja objasniti djetetu da točke nije imenovalo uzalud, već će ovisno o nazivima točaka biti imenovana i dužina. Ako je dijete imenovalo točke A i B, dužina će biti zapisana na sljedeći način: AB. Povezujemo govor i zapis i čitamo: dužina AB. Oznaku za dužinu učitelji često opisuju kao „krov, tendu, kapu" kako bi učenicima sjećanje na zapis bilo čim trajnije, no moramo biti svjesni da treba izbjegavati nematematički rječnik kako bi učenici u školi, ali i izvan nje, koristili pravilne izraze. Umjesto „krova" možemo reći „ravna crta" što će biti pravilniji izraz, a i kvalitetnija asocijacija jer učenici zamišljaju krov oblika obrnutog slova V i postoji mogućnost da bi oznake za dužinu postale upravo takve ako učenici usvoje takvu vizualizaciju.

Kako bismo još zornije dočarali oznaku za dužinu, možemo točke označiti ispod dužine umjesto pored nje i na tom primjeru objasniti kako su točke spojene zahvaljujući ravnoj crti i da svaki put kada vide takvu oznaku mogu naslutiti da su upravo točke zapisane ispod te ravne crte krajnje točke te dužine. Kroz nekoliko opisanih aktivnosti proveli smo metodu IGSZ, a kasnije ju učenici mogu primijeniti i u okolini- uzmimo za primjer gornji rub ploče u učionici. On je ravna crta koja postaje dužina kada na njegovim krajevima označimo krajnje točke. Dodatak ovoj aktivnosti bilo bi dodavanje pravca za što ponovno možemo iskoristiti vunu. Kada napnemo vunu cijelom dužinom zida na način da rub ploče „leži" ispod nje, učenicima je lakše shvatiti da je dužina dio pravca.

Nastavak rada donosi pregled geometrijskih pojmova koje učenici razredne nastave moraju savladati na nastavi Matematike, a koje nalaže Kurikulum. Geometrijske pojmove dijelit ćemo na osnovne, ravninske likove i geometrijska tijela.

2.1. Osnovni pojmovi

2.1.1. Točka

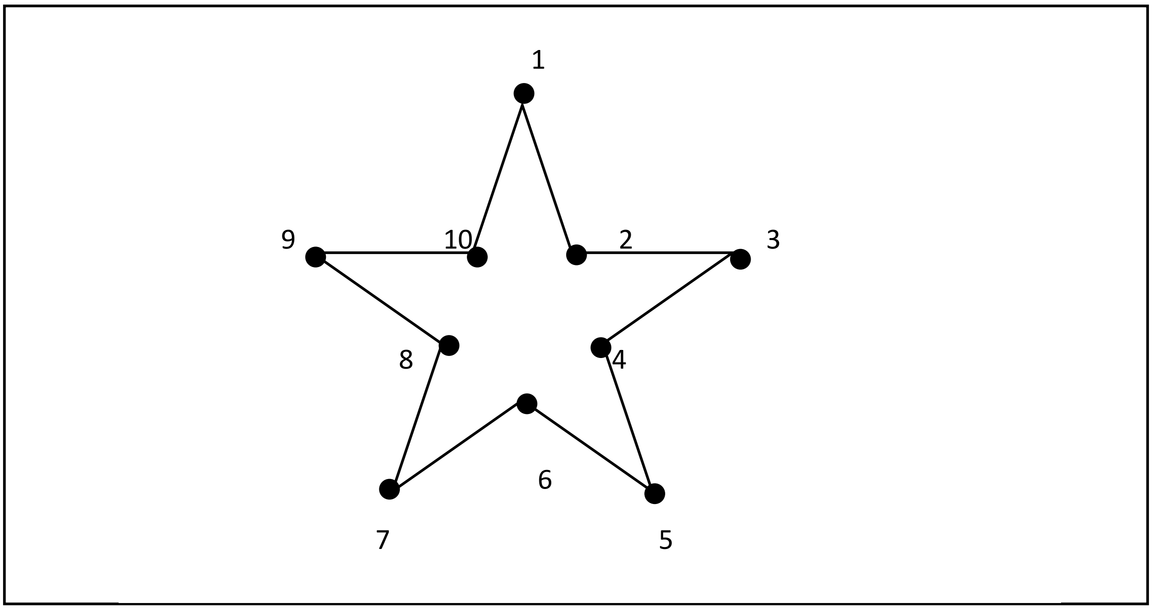
„Geometrijski elementi jesu točka, crta, ploha. Oni mogu nastati ili nižeg elementa počevši od točke, odnosno kao međa viših elemenata. Točka kao geometrijski element nema definicije, ili se definira kao međa (početna ili završna točka npr. dužine), ili kao sjecište dviju crta ili triju ploha" (Sevdić, M. i sur., *Matematika,* 1967. Zagreb: Panorama).

Definicija točke (koja definicija ujedno i nije) ne zadovoljava dječje pitanje „Što je to?" Odgovor na to pitanje bio bi da je točka u geometriji lokacija, najmanji objekt kojem se ne može odrediti duljina, površina ni obujam jer su jednaki nuli.

Učenici osnovne škole s točkom se upoznaju u prvom razredu. Uče o pojmu točke, imenovanju točaka i ulozi točke kao sjecišta u slučaju pravaca koji se presijecaju. Međutim, učenicima je u prvom razredu relativno kompleksno zamisliti beskonačnost jednog, a gdje dva pravca, no s točkom su se susreli i ranije. Učenici su upoznati s igrom *Spoji točke* od najranije dobi. Točke označene u raznim časopisima i radnim materijalima nisu nosile slovna imena, već uglavnom brojčanu vrijednost. Dijete spaja točke ovisno o broju koji se pored nje nalazi, a spaja ih redom *n* prema *n+1*, *n+1+1*…, a na kraju spojene točke tvore neku sliku koju dijete može obojati.

Učenici u prvom razredu uče vrste crta- ravne, zakrivljene, izlomljene, otvorene, zatvorene. Spominjemo točku u kontekstu pravaca koji se sijeku, ali ne napominjemo (odmah u prvom razredu) da je pravac ravna crta koja nastaje „točkanjem"[1] vrha zašiljene olovke pomoću ravnala.

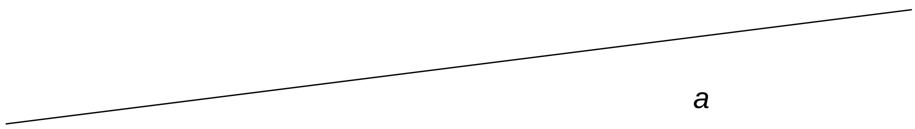
[1] Točkanje- postupak ostavljanja traga olovke u nizu pritiskom vrha olovke na papir



Slika 1. Igra "Spoji točke"

2.1.2. Pravac

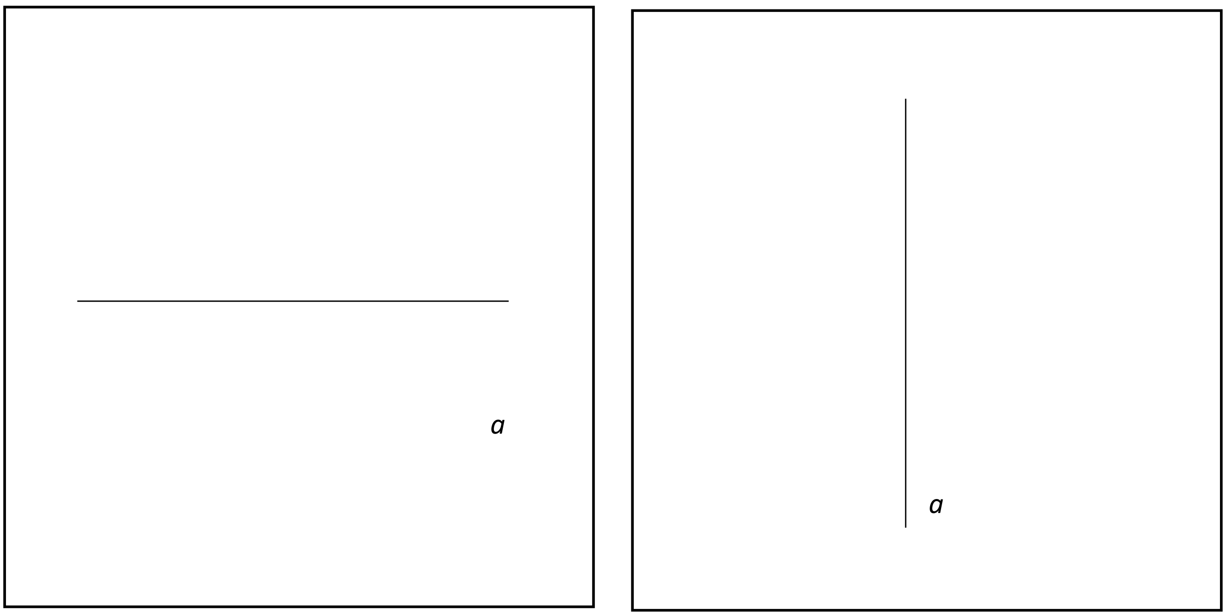
„Giba li se točka u prostoru, ona izvodi kao trag *crtu*; crta je međa ili sjecište dviju ploha (…), a neomeđena ravna crta zove se *pravac*“ (Sevdić, M. 1967:114). No, često se može čuti da se pravac zapravo ne definira, već se intuitivno poima kao neomeđena ravna crta. Kako možemo odrediti svojstva pravca, odnosno poučiti učenike pojmu pravca kako bi ga i oni intuitivno poimali kao ravnu neomeđenu crtu budući da takvu ne mogu nacrtati na papiru, ploči, kredom na školskom dvorištu...? Učenicima na početku zbunjujuće, no uz mnoštvo aktivnosti i predanosti učitelja, ali i suradnje učenika, stvara se mentalna slika pravca koja ide u nedogled.



Slika 2. Pravac a

2.2.2.1. Posebni položaji u prostoru

Učenici se s definicijom ravnine susreću tek u osmom razredu, ali svu geometriju kojom se bave u nižim razredima osnovne škole crtaju i konstruiraju upravo na nekoj ravnini. Iako apstraktan, pojam ravnine može se učenicima objasniti na jednostavan način. Ravnina je ravna ploha, a u učeničkom okružju to mogu biti bilježnice, ploča, razredni pano, učionički zidovi… Bilježnice koje učenici drže i koriste na stolovima smatramo *vodoravnim* ravninama, a ploča koja stoji na zidu učionice je *vertikalna* ravnina. Povezujući te pojmove s položajem pravca u prostoru, možemo zaključiti da se i pravci koji se nalaze u prvoj, odnosno drugoj vrsti ravnine zovu *vodoravni* ili *vertikalni* pravci.



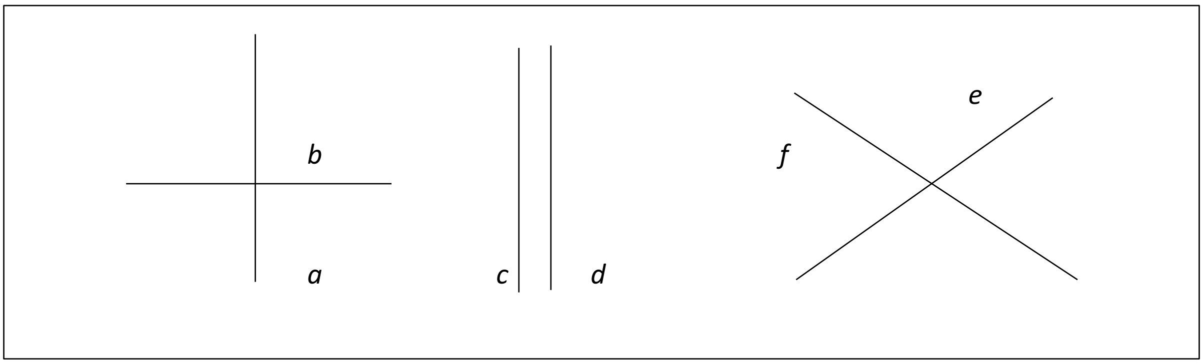
Slika 3. Horizontalni i vertikalni pravac

2.2.2.2. Međusobni položaj pravaca

Pravci mogu biti paralelni, ukršteni i okomiti. Kut koji zatvaraju dva okomita pravca iznosi 90 stupnjeva. Možemo zamisliti prethodno spomenute ravnine u međusobnom odnosu na način da vertikalna ravnina prolazi horizontalnom ravninom pod pravim kutom. Pravci koji su dio tih ravnina naizgled se dodiruju i njih zovemo *okomiti pravci*. Aksiom o paralelama govori da svakom točkom izvan zadanog pravca može prolaziti točno jedna

Paralelni pravci su oni pravci koji se nikada neće ukrstiti niti u jednoj točki. Zamislimo li nizanje vertikalnih pravokutnih ravnina koje sadrže pravce na način da rub jedne ravnine dodiruje rub druge ravnine, vidimo da se pravci ne sijeku ni u jednoj točki.

Pravci koji se sijeku dodiruju se u jednoj točki koju nazivamo *sjecište*. Učenici lako pamte geometrijsko nazivlje jer postoji slična nomenklatura u stvarnom životu (*Raskrižje je sjecište dviju ulica…*), stoga koristeći takve i slične primjere možemo učenicima ukazati prisutnost geometrije u okolišu.



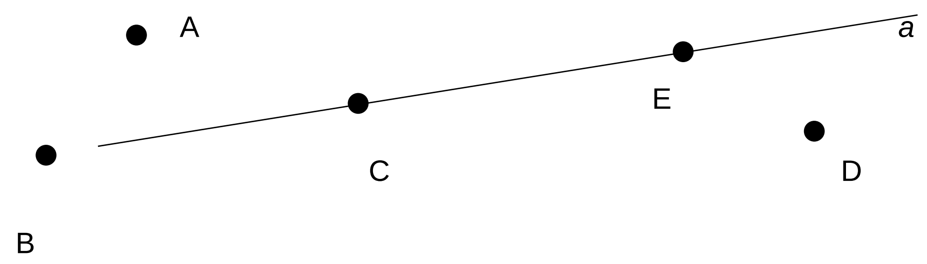
Slika 4. Međusobni odnosi pravaca

2.2.2.3. Pravac i točka

Pravac je ravna crta, a ravna crta je skup točaka. Upoznati smo s činjenicom da kroz jednu istaknutu točku može prolaziti beskonačno mnogo pravaca, kroz 2 istaknute točke može proći točno jedan pravac *koji prolazi objema točkama*. Kroz tri proizvoljno označene točke u ravnini mogu proći točno tri pravca osim ako se te tri točke ne nalaze u ravnini nizane jedna pored druge tako da već tvore kratku ravnu crtu- u tom slučaju, kroz njih može proći jedan pravac.

Točke mogu pripadati i ne pripadati pravcu. Točka pripada pravcu kada je označena na pravcu ili na dijelu ravnine kroz koju pravac prolazi „putujući“ u beskonačnost. Čest zadatak koji možemo vidjeti u školskim udžbenicima je sljedeći:

Navedi točke koje pripadaju pravcu a!



Geometrijska intuicija koja se treba javiti u učeniku prilikom rješavanja ovog zadatka je *pravac je ravna* ***neograničena*** *crta.* „Definicija“ bi trebala ponukati učenika da samoinicijativno „produži“ pravac zadan u zadatku i otkrije da se na pravcu *a* uz točke C i E nalazi i točka B. Način na koji možemo demonstrirati tu tvrdnju jest spajanje vijača na podu učionice, a čak i kotrljanjem klupka vune kroz vrata učionice- klupko vune i dalje postoji, no ne vidimo ga. Na taj način zamišljamo i pravac u ravnini.

Postoje situacije gdje dva pravca prolaze dvjema istim točkama, a to znače da ih *dijele*. Ako dva pravca imaju dvije točke zajedničke, onda im i sve ostale točke moraju biti zajedničke.

2.1.3. Dužina

Prema Sevdić, M. (1967:64) „Dužina je dio pravca koji je omeđen dvjema krajnjim točkama. Obilježava se obično njenim krajnjim točkama, ili se na njenoj sredini piše malo slovo. Npr. dužina *AB* ili dužina *a*.

Učenicima dužinu objašnjavamo pomoću prethodno objašnjenog gradiva-pripadnosti točke pravcu. Prostor na pravcu omeđen dvjema točkama koje pravcu pripadaju naziva se dužina. Primjer dužine možemo pokazati u učionici ili školskoj dvorani. Dužina je jedna strana ploče pravokutnog oblika čije su krajnje točke vrhovi pravokutnika, jedna strana školskog igrališta je dužina koju omeđuju dva okomita pravca na čijem se sjecištu sa spomenutom stranom formiraju krajnje točke.

Budući da dužina leži na pravcu, možemo ju definirati i kao *ravnu crtu omeđenu dvjema krajnjim točkama*.

Slika 5. Dužina kao dio pravca

2.2.3.1. Mjerenje dužina

Svaka dužina ima svoju duljinu, a prema Sevdić, M. (1967:64) „Izmjeriti dužinu znači odrediti njenu *duljinu*, tj. odrediti broj koji kaže koliko se puta neka za to odabrana dužina- *jedinica mjere*- nalazi u zadanoj dužini.

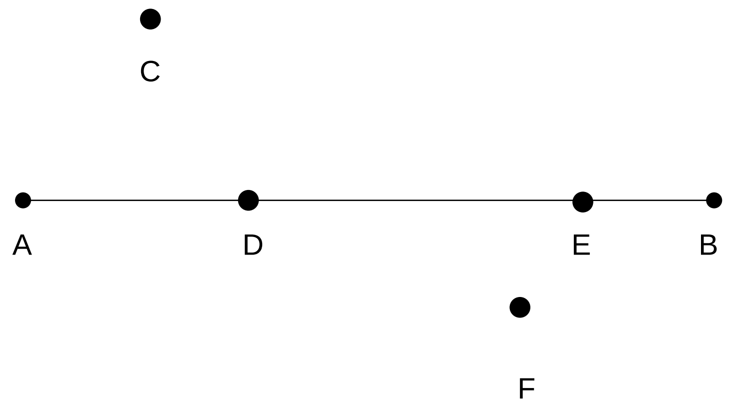
Vježbom na zadacima s nastavnih listića ili udžbenika učenici mogu shvatiti na koji se način dužina mjeri, no u tom slučaju moguće je koristiti mjerne jedinice kao što su centimetar i milimetar, u krajnjem slučaju decimetar. Odlaskom u školsko dvorište ili igralište učenici mogu alatom (metrom) izmjeriti duljinu stranica ploča na prilazu u školu, duljinu strana igrališta, udaljenost između drveća u arboretumu ili veličinu parkirnog mjesta na školskom parkiralištu. Sve podatke učenici trebaju bilježiti na pravilan način pazeći na dogovorene mjerne jedinice, a kasnije i na pretvaranje jedinica iz veće u manju i obrnuto.

2.2.3.2. Udaljenost među dvama mjestima

Učenicima objasnimo pojam dužine i uputimo ih na pravilno mjerenje dužine u neposrednoj okolini.

2.2.3.3. Odnos točke i dužine

Dužinu (za razliku od pravca) ne možemo produžiti zbog njene omeđenosti, što znači da točke koje pripadaju dužini moraju biti one koje na toj dužini leže.



Slika 6. Pripadnost točaka dužini

Točke A, D, E i B pripadaju dužini *AB*. Točke A i B su krajnje točke, a točke D i E su unutarnje točke.

Specifično za isticanje novih točaka na dužini jest *stvaranje* novih dužina. Iz prvobitne dužine *AB* možemo uočiti postojanje dužine *AD, AE, DE* i *DB*.

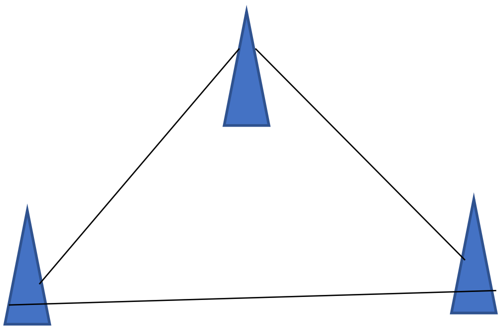
2.2. RAVNINSKI LIKOVI

2.2.1. Trokut

2.2.4.1. Crtanje trokuta

Igra opisana u prethodnom poglavlju („*Spoji točke*“) može biti shvaćena kao dobar temelj za upoznavanje učenika s pojmom trokuta. Kada u ravnini označimo tri proizvoljne točke i damo uputu da se one spoje ravnim crtama, učenici primjećuju nekoliko činjenica- objekt koji su dobili ima tri vrha, tri dužine koje su ujedno i strane, a zbog dvodimenzionalnosti ga poimamo kao geometrijski lik.

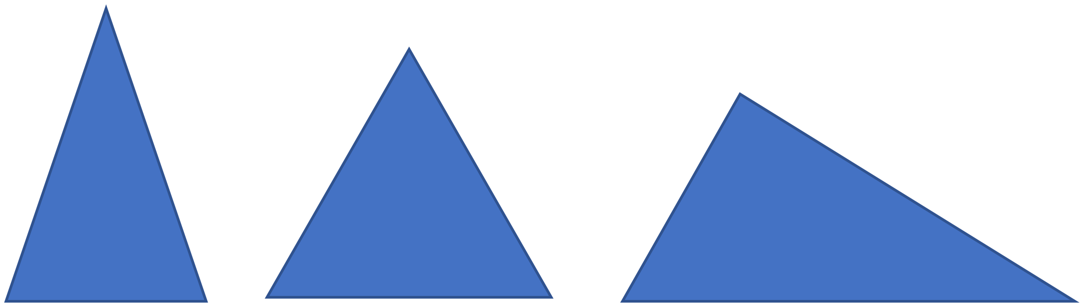
Učenici mogu pojmiti trokut u stvarnosti pomoću prethodno spomenute užadi i čunjeva iz školske dvorane. Na slici je prikazan položaj čunjeva oko kojih je potrebno namotati uže kako bi sveukupna slika davala dojam trokuta.



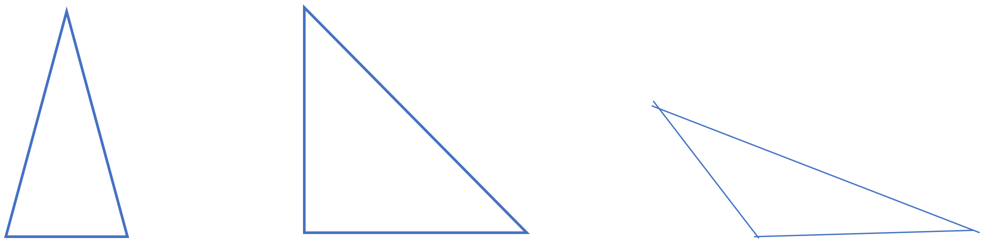
Slika 7. Predodžba trokuta pomoću fizičkih elemenata

2.2.4.2. Vrste trokuta

Koristeći čunjeve i konop možemo demonstrirati vrste trokuta ovisno o duljini stranica i veličini kuta. Učenici mogu samostalno pomicati čunjeve tako da se opseg trokuta ne mijenja, no mijenja se kut kojeg zatvaraju dvije strane. Također, mogu stvoriti i nove trokute igrajući se duljinom stranica.



Slika 8. Jednakokračni, jednakostranični i raznostranični trokut



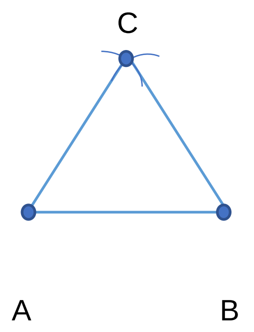
Slika 9. Šiljastokutni, pravokutni i tupokutni trokut

Učenici mogu grupnim radom (pod uvjetom da se svaka grupa sastoji od tri učenika) pomoću gume (lasteža) formirati razne vrste trokuta pri čemu je svaki učenik u skupini jedan vrh trokuta.

Crtanje trokuta mora biti uredno, a korištenje kutomjera pri mjerenju veličina kutova precizno i usmjereno na točnost. Konstuiranje trokuta mora biti objašnjeno na učenicima razumljiv i prihvatljiv način, kroz svega nekoliko koraka.

1. Jednakostraničan trokut

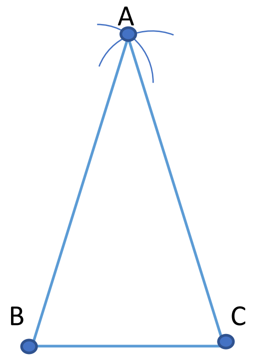
Nacrtamo dužinu AB. Iglu šestara ubodemo u točku A i u šestar uzimamo duljinu dužine AB. Duljinu dužine AB grafitnim dijelom šestara prenosimo iznad dužine AB. Ponavljamo postupak iz točke B. Na mjestu gdje se spajaju tragovi grafitnog dijela šestara nalazi se točka C. Trokut je jednakostraničan jer $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$.



Slika 10. Konstruiranje jednakostraničnog trokuta

2. Jednakokračan trokut

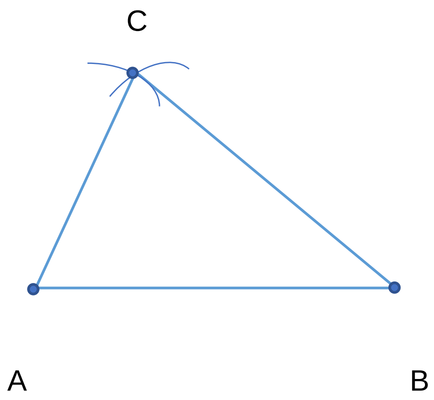
Nacrtamo dužinu AB. Iglu šestara ubodemo u točku A i u šestar uzimamo duljinu veću od duljine dužine AB. Tu veličinu grafitnim dijelom šestara prenosimo iznad dužine AB. Ponavljamo postupak iz točke B. Na mjestu gdje se spajaju tragovi grafitnog dijela šestara nalazi se točka C. Trokut je jednakokračan jer $\overline{BC}=\overline{AC} \neq \overline{AB}$.



Slika 11. Jednakokračni trokut

3.Raznostraničan trokut

Nacrtamo dužinu AB. Iglu šestara ubodemo u točku A i u šestar uzimamo duljinu veću od duljine dužine AB. Tu veličinu grafitnim dijelom šestara prenosimo iznad dužine AB. Ponavljamo postupak iz točke B, no u šestar uzimamo novu, proizvoljnu duljinu. Na mjestu gdje se spajaju tragovi grafitnog dijela šestara nalazi se točka C. Trokut je jednakokračan jer $\overline{BC}=\overline{AC} \neq \overline{AB}$.



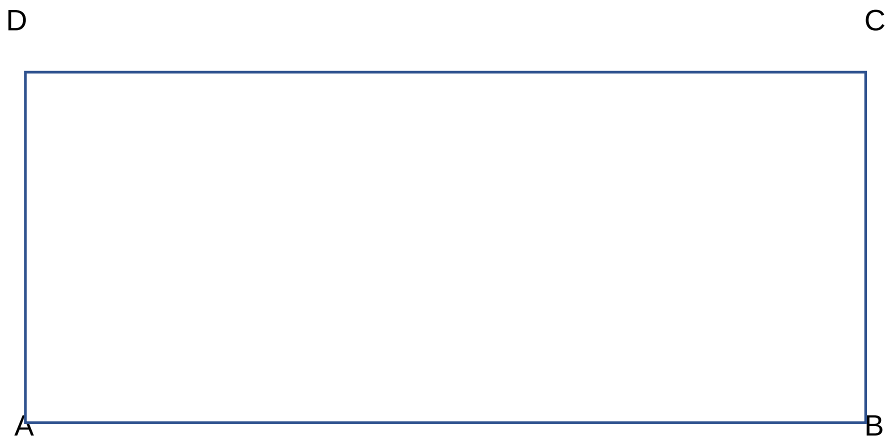
Slika 12. Raznostranični trokut

2.2.2. Kut

Učenici su savladavajući pojam trokuta i igrom u kojoj su predstavljali vrhove trokuta otkrili da se promjenom položaja vrha trokuta mijenja i čitav izgled trokuta. Provedenu aktivnost možemo shvatiti kao uvod za upoznavanje s pojmom kuta. Prema mrežnom izdanju *Hrvatske enciklopedije* koju izdaje Leksikografski zavod Miroslav Krleža kut je definiran kao „dio ravnine omeđen dvjema zrakama (kraci kuta) koje imaju zajednički početak (vrh kuta)", a kojeg označavamo kružnim lukom. Najčešće se mjeri u stupnjevima ili radijanima.

2.2.3. Pravokutnik

Sevdić (1967:245) navodi da je *pravokutnik* paralelogram, a paralelogram „četverokut kojemu su po dvije suprotne stranice paralelne (...), a udaljenost njegovih usporednih stranica određuje visinu.“ Također, navodi da pravokutnik „ima duljinu i širinu (…), ima jednake dijagonale (…), ima dvije osi simetrije, dakle je dvoosno simetričan lik.“ Zadatak učitelja je predočiti učenicima kako pojmiti pravokutnik i geometrijskom intuicijom prizvati njegov naziv i obilježja prilikom susreta s istim u okružju. Nastava nalaže korištenje definicije u kojoj je pravokutnik geometrijski lik koji ima dvije i dvije nasuprotne strane jednake i paralelne. Paralelnost dviju strana spram paralelnosti preostalih dviju strana nalažu okomitost koja se javlja u sva četiri kuta, zatvarajući pritom prave kutove u pravokutniku (sl. 13.)

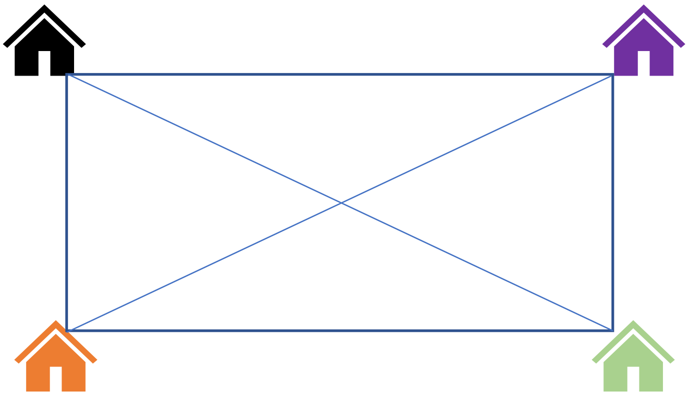


Slika 13. Pravokutnik

Općeprihvaćeno pravilo jest označavanje točaka pravokutnika počevši od donjeg desnog vrha (A) u smjeru obrnutom od kazaljke na satu do posljednjeg vrha (D).

Soucie, T. i Katalenac, I. u udžbeniku *Matematika 5* dostupnom na Edutoriju (e-škole) čiju kvalitetu nadgleda CARNET govore o vrhovima pravokutnika na način da „Vrhovi pravokutnika koji pripadaju istoj stranici nazivaju se susjedni vrhovi, a oni koji ne pripadaju istoj stranici nazivaju se nasuprotni vrhovi.“

Objasniti pojmove *susjedni* i *nasuprotni* moguće je upravo pomoću- susjedstva. Uzmimo za primjer završetak ulice koja sa svake strane ima pravilno raspoređene kuće (sl. 14.) i pokažimo učenicima da nisu samo dva para susjednih vrhova.



Slika 14. Susjedni i nasuprotni vrhovi

Primjer ukazuje na to da su:

- crna i ljubičasta kuća susjedne kuće
- ljubičasta i zelena kuća susjedne kuće
- zelena i narančasta kuća susjedne kuće
- narančasta i crna kuća susjedne kuće

Ali, govori nam i da su:

- crna i zelena kuća nasuprotne kuće
- narančasta i ljubičasta kuća nasuprotne kuće

Narančastu kuću zamijenimo slovom A, zelenu kuću slovom B, ljubičastu kuću slovom C i crnu kuću slovom D kako bismo dobili vrhove pravokutnika. Iz navedenog slijedi da su susjedni vrhovi A-B, B-C, C-D, A-D, dok su nasuprotni vrhovi A-C i B-D.

2.2.6.1. Crtanje i konstrukcija pravokutnika

Postupak koji učenici uče kako bi konstruirali pravokutnik je sljedeći:

Nacrtaj dužinu AB. Nacrtaj dužinu AD koja će u odnosu na pravac na kojem leži dužina AB biti okomita. Nacrtaj pravac paralelan s pravcem na kojem leži dužina AD na način da bude okomit na pravac na kojem leži dužina AB i prolazi točkom B. . U šestar uzmi duljinu dužine AD na način da igla šestara bude postavljena u točku A, a grafitni dio šestara dotiče točku D. Iglu šestara postavi u točku B, a grafitnim dijelom obilježi duljinu dužine na novonastalom pravcu. Na mjesto gdje se trag grafitnog dijela šestara susreće s pravcem nalazi se točka C. Spoji točke C i D ravnalom.

Iako kompleksno i apstraktno, učenici shvaćaju postupak kada ih učitelj usmjerava i aktivno radi s njima na preciznosti i prizivanju pojmova koje su savladali (*dužina leži na pravcu, okomitost*).

U nastavku slijede jednostavnije upute za postizanje istog cilja.

Nacrtaj dužinu AB. Nacrtaj pravac a *paralelan s dužinom AB. Potrebno je nacrtati okomicu na pravac* a *koja prolazi točkom A. Postupak crtanja okomice ponoviti i kroz točku B.*

Naizgled veoma slično, no u drugom postupku nedostaje faktor koji razvija i unaprjeđuje učeničke vještine u radu na polju geometrije, a i kasnijeg razvitka urednosti i procjene- šestar.

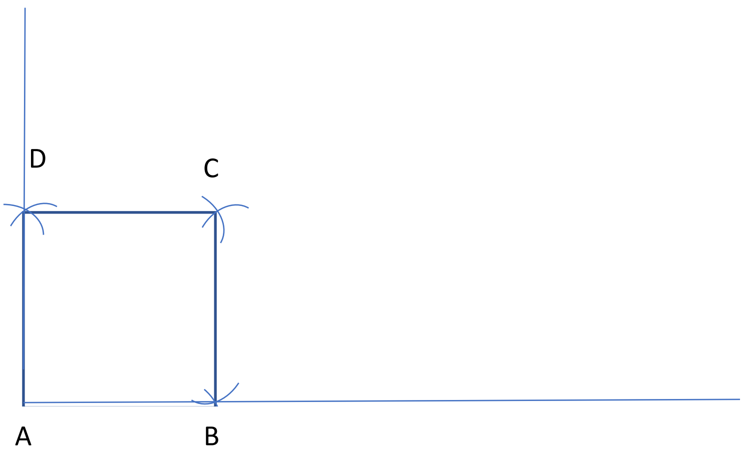
2.2.4. Kvadrat

Prema definiciji koju 2014. daje Hrvatski jezični portal, kvadrat je „četverokut kojem su svi kutovi pravi i sve stranice jednake duljine.“ Budući da je prethodno spomenuti geometrijski lik bio pravokutnik, možemo napraviti svojevrsnu poveznicu koja kazuje o sličnostima pravokutnika i kvadrata, a to su, u prvom redu, pravi kutovi. Razlika koju moramo prikazati učenicima jest u nejednakosti strana- pravokutnik ima dva para paralelnih stranica od kojih su dvije i dvije stranice jednake duljine, dok kvadrat ima sve četiri stranice jednake duljine. Koristeći metodička pomagala koji prikazuju kvadrat i pravokutnik i njihovim uspoređivanjem, učenici mogu doći do zaključaka o sličnostima i razlikama između tih likova. Također, valja spomenuti i dijagonale likova. Iako su obje dijagonale pravokutnika i kvadrata jednake duljine, dijagonale kvadrata sijeku se pod pravim kutom, odnosno onim od 90 stupnjeva. Ako metodički pribor dozvoljava, moguće je „uklopiti“ dva kvadrata unutar jednog pravokutnika (na način da su dvije stranice kvadrata spojene).

2.7.2. Crtanje i konstrukcija kvadrata

Konstrukcija kvadrata jednostavnija je od konstrukcije pravokutnika zbog samo jedne veličine stranica koju prenosimo.

Uzmimo za primjer zadatak koji govori kvadratu u kojem duljina stranice *a* iznosi 3 centimetra. Taj podatak je dovoljan kako bismo konstruirali željeni geometrijski lik. Dovoljno je nacrtati pravac na kojem ćemo označiti početku točku- nazovimo ju A (čime ćemo stvoriti polupravac), konstruirati kut od 90 stupnjeva i povući pravac kroz prvobitno zadanu točku i onu nastalu konstrukcijom kuta. Iz početne točke u šestar valja uzeti zadanu duljinu i označiti je na novom pravcu. Oznaka koju postavljamo točka je D. Veličinu koju imamo u šestaru prenosimo na prvi pravac i označavamo novu točku, točku B. Konstrukciju iz točke B dobivamo postupkom kao i iz točke A.



Slika 8. Konstrukcija kvadrata

Crtanje kvadrata je znatno jednostavnije. Potrebno je nacrtati pravac i na njemu označiti točku A, koja će ujedno biti i vrh kvadrata. Dvama trokutima crtamo okomicu kroz točku A i označavamo zadanu veličinu na tom pravcu. Postupak ponavljamo kroz tu točku, točku D, a isto radimo kako bi dobili točke B i C.

2.2.5. Kružnica

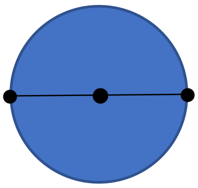
Kružnica je skup točaka u ravnini jednako udaljenih od središta koje najčešće označavamo točkom *S.* Učenici se upoznaju s kružnicom prilikom bojanja rubova slike nastale na papiru ili platnu okvira kruga, ali ne doživljavaju kružnicu kao dio kruga. Osnovna razlika između kružnice i kruga koju učenici moraju savladati jest da je kružnica zakrivljena crta, a krug ploha omeđena kružnicom, odnosno zakrivljenom crtom. Razlika u označavaju kružnice i kruga je bojanje plohe unutar kružnice kako bi se dočarao krug. Više o ulozi kružnice u formiranju geometrijske intuicije u poglavlju *Krug.*

2.2.6. Krug

Prema D. Hilbertu (1950) krug možemo definirati na sljedeći način: „Ako postoji točka M, proizvoljna točka smještena u ravnini *a*, a i točke A koje pripadaju ravnini *a*, a koje su segmenti MA i kongruentni jedne spram drugih, dobivamo krug. M je u tom slučaju središte kruga.“

Učenicima će takva definicija biti izrazito kompleksna, stoga se koristimo jednostavnijim rječnikom i govorimo da je kružnica skup točaka u ravnini jednako udaljenih od središta, a krug geometrijski lik kojeg omeđuje kružnica. Učenici se svakodnevno susreću s predmetima oblika kruga i kao takve ih prepoznaju, ne uzimajući u obzir da su *krugovi* koje vide zapravo dio geometrijskog tijela koje nazivamo *valjak*.

Krug je dvodimenzionalni geometrijski oblik koji je omeđen zatvorenom zakrivljenom crtom. Kada bismo kroz središte kruga spojili dvije točke na kružnici koja ga omeđuje, dobili bismo promjer kruga. Udaljenost od jedne od tih točaka do središta zove se polumjer. Kako bi učenici shvatili da dvostruka veličina polumjera daje veličinu promjera, možemo posegnuti za krugom izrezanim od kartona na kojem ćemo označiti središte, a na samoj kružnici koja omeđuje krug upiknuti pribadače koje će predstavljati točke jednako udaljene od središta. Komadom vune učenici bi mogli izmjeriti udaljenost od jedne točke kružnice do središta, a zatim isti komad vune prenesti i od središta do točke zrcalno određenoj na kružnici.



Slika 9. Igra s krugom i vunom

2.9.2. Konstruiranje kruga

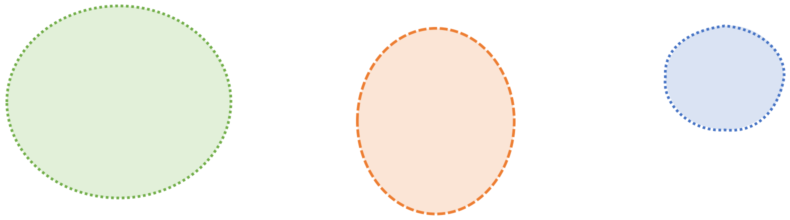
Konstruiranje kruga učenici usvajaju prilično brzo. Potrebno je označiti točku i imenovati ju, a ona predstavlja središte kruga kojeg ćemo nacrtati. Veličinu polumjera uzimamo u šestar, iglu šestara ubodemo u označeno središte i oprezno i uredno crtamo kružnicu koja omeđuje krug držeći šestar za sam vrh, ne pritišćući grafit na papir, već ostavljajući uredan trag.

Kada bismo zadatak postavili na složeniji način, trebalo bi ga riješiti na drugačiji način. Zadatak bi mogao glasiti ovako: *Zadane su dvije točke (A i B) koje pripadaju kružnici koja omeđuje krug. Dužinu koja spaja točke A i B nazivamo promjer. Konstruiraj taj krug!*

U tom zadatku važno je prisjetiti se primjera s vunom u kojem su učenici shvatili pojam promjera i polumjera.

Postupak koji u ovom zadatku očekujemo od učenika je crtanje dužine čije su krajnje točke A i B, konstrukcija simetrale dužine AB kako bi dobili središte kružnice (s pripadajućom oznakom i imenom, npr. S), uzimanje veličine AS ili BS u šestar. Zatim valja upiknuti šestar u središte S i nacrtati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B. Međutim, učenici trebaju označiti područje ravnine koje nazivamo krug- a to je ravnina unutar zakrivljene crte koju su nacrtali pomoću šestara.

Učenici mogu sudjelovati i u „natjecanju" u kojem bi trebali pokušati nacrtati oblik najsličniji krugu bez korištenja šestara- točkanjem, povlačenjem kraćih crta, raznim konstrukcijama. Rezultati crtanja mogli bi izgledati približno prikazanom na slici. Takav tip zadatka bitan je kako bi učenici razvijali koordinaciju ruka-oko i povezali pojmove koje su naučili na satu.



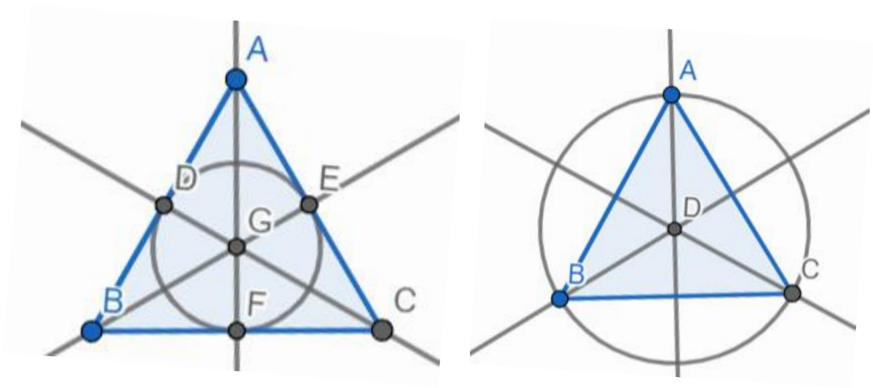
Slika 10. Crtanje kruga bez šestara

Aktivnost koju je moguće provesti na satu Likovne kulture jest izrezivanje krugova iz kolaž-papira i stvaranje imaginarne životinje ili bića. Kako bi aktivnost bila zanimljivija i privlačnija učenicima, biće koje trebaju stvoriti možemo nazvati Kružko Kružić.

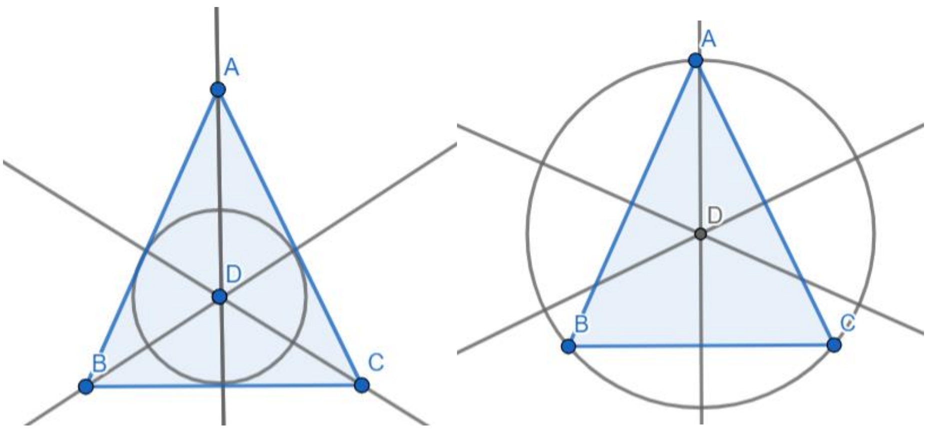
2.9.3. Povezanost kruga, kružnice i trokuta

Učenici savladavaju pojmove i stvaraju mentalne slike kruga, kružnice i trokuta. Kada su sposobni stvoriti mentalne slike, moguće je povezati te pojmove upisivanjem i opisivanjem kružnice trokutima.

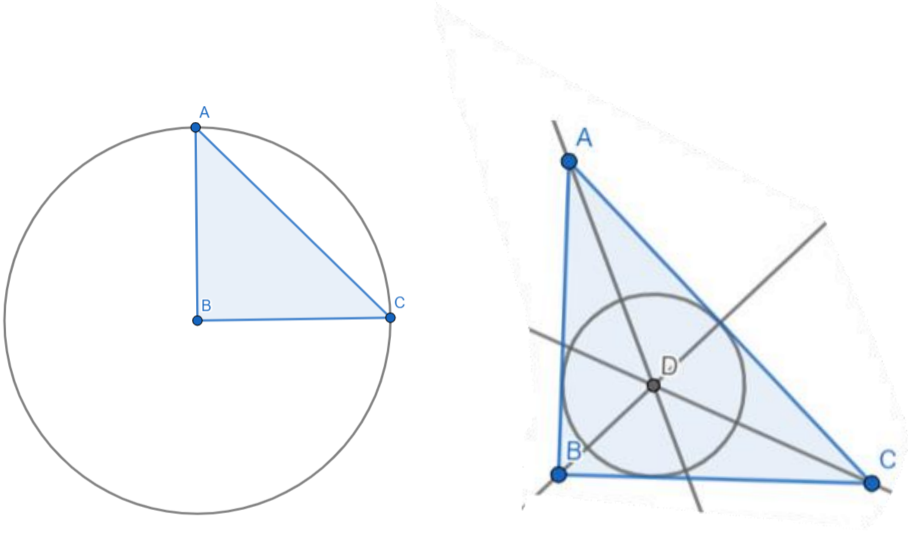
Trokut kojem je najlakše upisati i opisati kružnicu je jednakostranični trokut. Stvaranjem simetrala kuta, odnosno stranica, dobivamo upisanu, odnosno opisanu kružnicu.



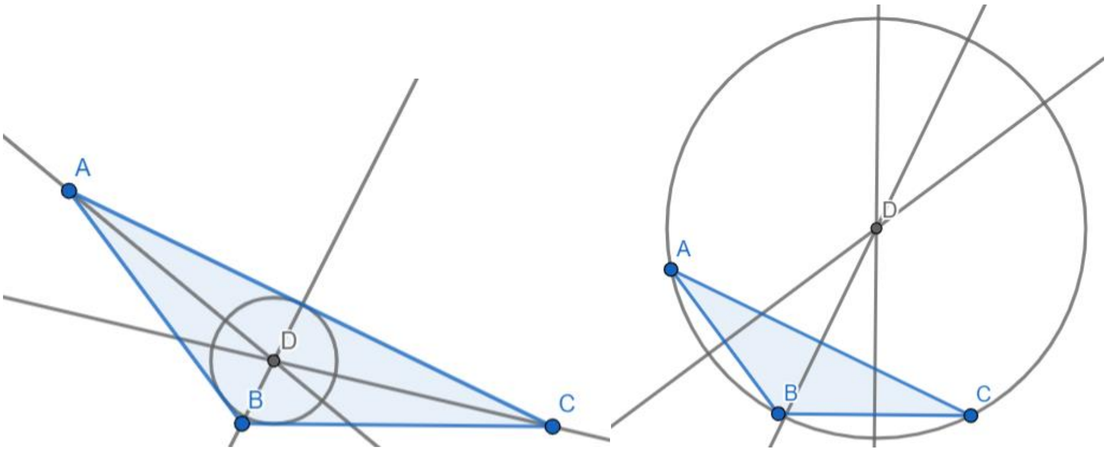
Slika 11. Upisana i opisana kružnica jednakostraničnog trokuta



Slika 12. Upisana i opisana kružnica jednakokračnog trokuta



Slika 13. Opisana i upisana kružnica pravokutnog trokuta



Slika 14. Upisana i opisana kružnica tupokutnog trokuta

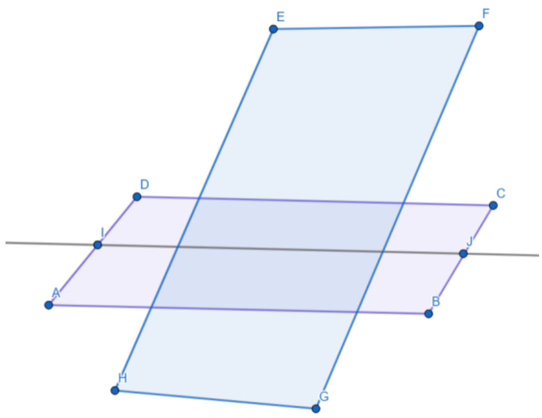
Područje koje zatvara kružnica je krug, a kroz nastale slike možemo povezati polumjer kruga sa simetralama strana, to jest kutova trokuta. Alat koji možemo koristiti, a koji je i korišten za izradu trokuta i kružnica na prethodnim slikama je GeoGebra. Budući da učenici mogu početi pohađati predmet Informatiku već od 1. razreda osnovne škole, moguće je implementirati GeoGebru i u nastavu pomoću školskih tableta ili pametne ploče. Više o GeoGebri u poglavlju *Alati za postizanje uspjeha.*

2.2.7. Ravnina

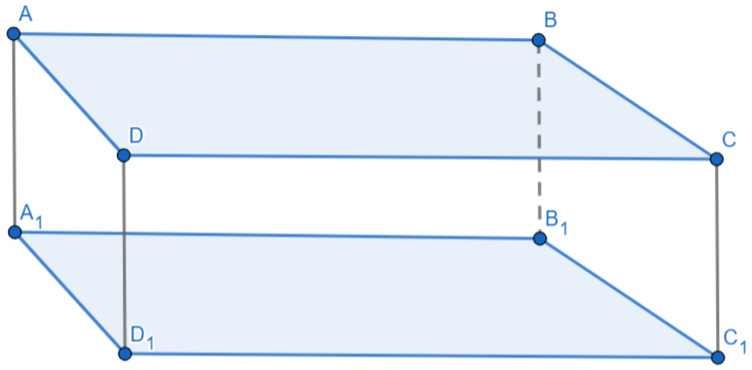
Prema D. Hilbertu (1950), ravnina je „skup točaka“. Međutim, ta definicija ne bi puno objasnila učenicima nižih razreda osnovne škole. Ravninu najčešće prikazujemo kao ravnu plohu, a često ju opisujemo i kao neograničenu. Primjer ravnine može biti ploča, školska klupa, hodnik škole…

2.10.2. Međusobni odnosi ravnina

Ravnine mogu biti međusobno paralelne ili se mogu sjeći. Ravnine koje su paralelne nemaju zajedničkih točaka i neće se susresti niti u jednom trenutku. Ravnine koje se sijeku mogu biti međusobno okomite ili se sjeći pod kutom različitim od 90 stupnjeva. Pravac kojim prolaze ravnine koje se sijeku nazivamo presječnicom.



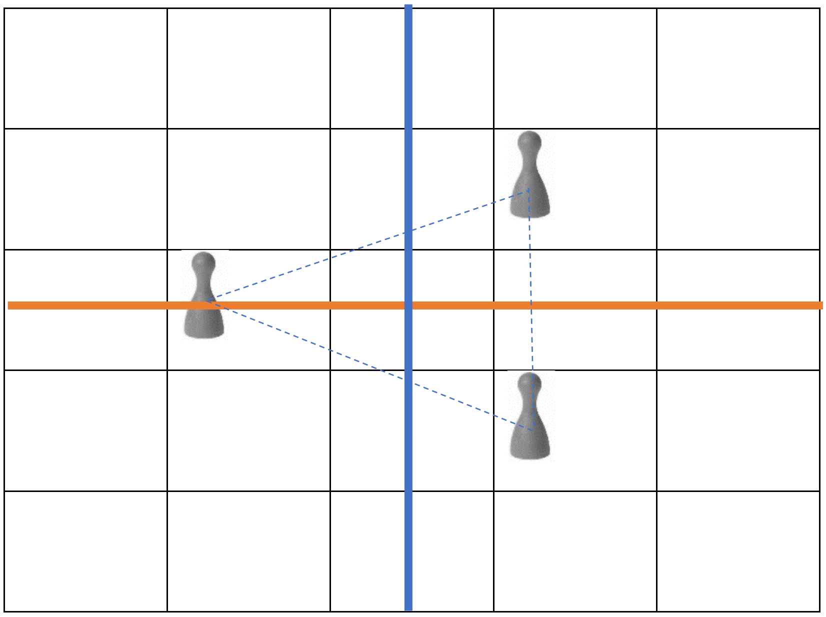
Slika 15. Presječni pravac određen točkama I i J



Slika 16. Paralelne ravnine na primjeru kvadra

2.10.3. Povezanost ravnine i geometrijskih likova

Svaki geometrijski lik je skup točaka koji pripadaju nekoj ravnini. Prethodno opisanu aktivnost pronalaska koordinate točke možemo odvesti korak dalje i pomoću igraćih figura na papirima stvoriti geometrijske likove postavljajući figure kao vrhove likova. Na slici je primjer označavanja vrhova trokuta i prepoznavanje dobivenog oblika mentalnim povezivanjem vrhova.

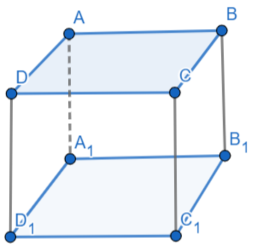


Slika 17. Igra povezanosti ravnine i likova

2.3. GEOMETRIJSKA TIJELA

2.3.1. Kocka

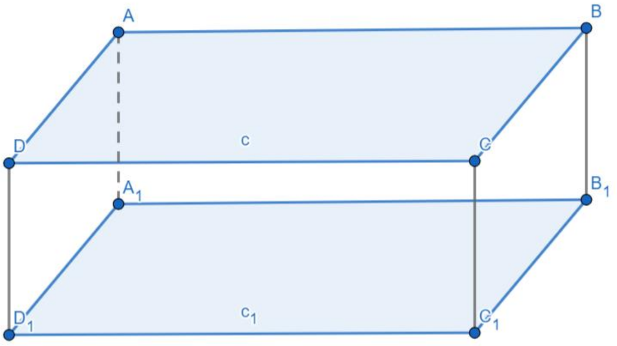
Kocka je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest strana koje su međusobno jednakih dimenzija. Svaka strana kocke zapravo je pravokutnik. Kocka ima dvanaest rubova i osam vrhova. Predmete oblika kocke susrećemo svaki dan, neovisno radi li se o igraćim kockama, kutijama za igračke oblika kocke, ormarića za cipele oblika kocke...



Slika 18. Kocka

2.3.2. Kvadar

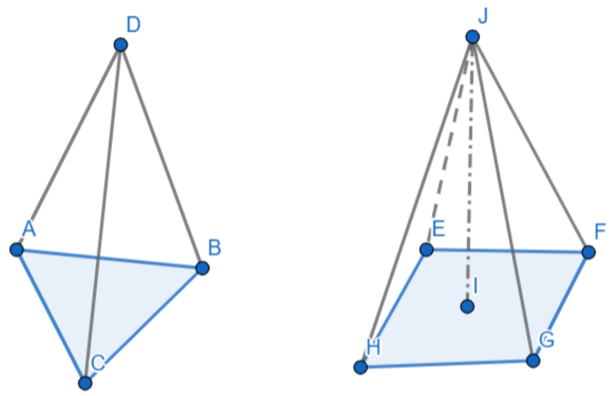
Kvadar je geometrijsko tijelo koje učenici najčešće miješaju s kockom. Kvadar, za razliku od kocke, nema sve stranice jednakih dimenzija, već je sastavljen od pravokutnika i/ili kvadrata. Kao kod kocke, strane kvadra su parno paralelne i okomite jedne na druge.



Slika 19. Kvadar

2.3.3. Piramida

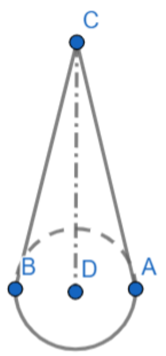
Piramida je geometrijsko tijelo koje može imati različite baze, a najčešće su baze trokut i kvadrat. Baza određuje oblik strana piramide koje se sužavaju prema vrhu i međusobno spajaju u jednoj točki iz koje, kada povučemo okomit pravac na bazu, dobivamo visinu piramide. Ovisno o obliku baze, piramide dijelimo na trostrane, četverostrane i višestrane piramide. Druga podjela piramida je na uspravne i kose, a ona ovisi o jednakosti strana piramide- ako su sve strane jednake, piramida će biti uspravna, ako su strane različitih dimenzija, piramida će biti kosa.



Slika 20. Trostrana i četverostrana piramida

2.3.4. Stožac

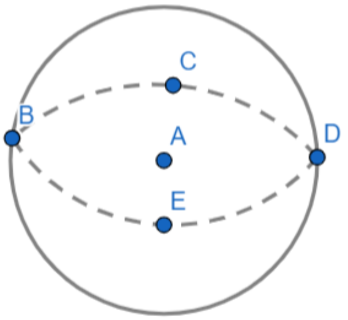
Stožac je geometrijsko tijelo koje učenike najviše podsjeća na piramidu, stoga je na učitelju da koristi ispravnu terminologiju i primjerima pokaže i dokaže razlike između stošca i piramide. Za razliku od piramide, stožac nema strane, već plašt koji je zapravo jedna zakrivljena ploha. Baza stošca nije mnogokut, već krug. Kao i piramida, stožac može biti uspravan i ukošen (kos), a to ovisi o okomitosti osi na ravninu baze. Kada bismo kroz vrh (uspravnog) stošca okomito na bazu provukli napetu nit i zarotirali stožac, ne bismo vidjeli promjene u tragu koji ostavlja- naizgled bi bio nepromijenjen. Stožac zbog tog svojstva nazivamo rotacijskim tijelom.



Slika 21. Stožac s visinom CD

2.3.5. Kugla

Kugla je geometrijsko tijelo koje je određeno točkama u trodimenzionalnom prostoru koje su jednako udaljene od središta. Udaljenost od središta do bilo koje točke nazivamo radijus. Kugla nema vrhova, strana ni bridova. Suprotne točke kugle leže na pravcu koji prolazi središtem kugle.



Slika 22. Kugla

2.16. Simetrija

Simetrija je, jednostavno rečeno, preslikavanje elemenata s obzirom na zadani kriterij. Vrste simetrija su centralna, osna i planarna simetrija. Centralnu simetriju promatramo kao preslikavanje elementa s obzirom na udaljenost od zadane točke, osna simetrija nalaže preslikavanje elementa s obzirom na os koja je obilježena pravcem, a planarna simetrija preslikava element s obzirom na ravninu.

3. MODELI UČENJA

3.1. Kahnemanovi Sustav 1 i Sustav 2

Daniel Kahneman u svojoj knjizi *Misliti, brzo i sporo* (2011) shvaća razmišljanje i um kao dva sustava koja se međusobno dopunjuju. *Sustav 1* je automatski odgovor na podražaj, a *Sustav 2* podupire i obogaćuje *Sustav 1*. Razvoj geometrijske intuicije pomoću ova dva sustava možemo shvatiti na sljedeći način: *Sustav 1* odgovoran je za prepoznavanje usvojenih pojmova. Primjerice, pokažemo li učeniku sliku kvadrata i kažemo da se objekt na slici naziva *kvadrat*, *Sustav 1* će u budućnosti povezati sliku kvadrata s nazivom *kvadrat*. *Sustav 2* se uključuje kada učenik treba naučiti kompleksnije pojmove i savladati teže zadatke. Svaki kvadrat omeđen je četirima jednakim stranicama. Svaki vrh kvadrata je točka koju treba imenovati. Stranice kvadrata jednake su duljine, a sve navedeno potrebno je učeniku kako bi mogao nacrtati kvadrat. *Sustav 1* prepoznavanjem pomaže učeniku za savladavanje bazičnih pojmova, dok *Sustav 2* učenika potiče na razmišljanje, crtanje, isticanje i konstruiranje zadanih geometrijskih oblika.

Učenik bi, prema načelima funkcioniranja *Sustava 1* i *Sustava 2* bio sposoban savladati sve geometrijske izazove, počevši od bazičnih informacija, pa sve do kompleksnih zadataka.

Tablica prikazuje rad *Sustava 1* i *Sustava 2* s obzirom na geometrijske pojmove koje učenici trebaju savladati u osnovnom obrazovanju.

Geometrijski pojam	*Sustav 1*	*Sustav 2*
Točka	Prepoznaje točku	Crta i imenuje točku
Dužina	Prepoznaje dužinu	Crta dužinu, imenuje točke, prepoznaje sve dužine na pravcu s označenim točkama
Pravac	Prepoznaje pravac	Crta pravac, shvaća beskonačnost pravca, stvara mentalnu predodžbu pravca
Polupravac	Prepoznaje polupravac	Uspoređuje polupravac, pravac i dužinu, crta polupravac, označava točku i imenuje polupravac
Trokut	Prepoznaje trokut	Crta trokut, imenuje strane trokuta, označava vrhove trokuta, uočava sukladne trokute
Kvadrat	Prepoznaje kvadrat	Crta kvadrat, imenuje stranice i vrhove, shvaća kvadrat kao poseban pravokutnik
Pravokutnik	Prepoznaje pravokutnik, uočava pravokutnik u prostoru	Crta pravokutnik, označava stranice, definira pravokutnik, označava i imenuje točke i strane pravokutnika
Krug	Prepoznaje krug	Pokazuje krug u okružju, daje primjer kruga, crta krug, označava središte kruga i definira krug
Kružnica	Prepoznaje kružnicu, razlikuje kružnicu od kruga	Crta kružnicu, objašnjava udaljenost točaka kružnice od središta, označava središte
Kut	Prepoznaje kut u trokutu, pravokutniku, kvadratu	Crta i konstruira kut, položajem tijela (ruku) pokazuje kut ovisno o vrsti kuta, primjećuje vanjske i unutarnje kutove, uočava kutove i okolini i procjenjuje veličinu kuta

3.2. Bloomova taksonomija

Benjamin Bloom u knjizi *Taxonomy of Educational Objectives* (1956) klasificira odgojno- obrazovne ciljeve u tri područja- kognitivno, afektivno i psihomotoričko. *Piramida* kojom prikazujemo napredak i praćenje napretka učenika podijeljena je na šest razina. Prva razina je *pamćenje*. Glagoli kojima ostvarujemo prvu razinu su *definiraj, zapamti, zabilježi, ispričaj, izvijesti, sastavi popis, imenuj, ponovi, prisjeti se*. Drugu razinu učenik savladava tek nakon savladane prve razine, a druga razina je *razumijevanje*. Razumijevanje gradiva možemo utvrditi glagolima *opiši, identificiraj, razmotri, prepoznaj, smjesti, objasni, izrazi, raspravljaj*. Treća razina je razina *primjene*. Glagoli kojima utvrđujemo savladanost treće razine u geometriji su *primijeni, izvedi, protumači, prikaži, vježbaj, ilustriraj*. Četvrta razina je *analiza*. Analizom učenik treba *razlučiti, napraviti dijagram, pitati, raspravljati, eksperimentirati, riješiti*. Pretposljednja razina je *evaluacija,* a u njoj učenik treba biti sposoban *izabrati, predvidjeti, vrednovati, prosuđivati, procijeniti, odrediti* i *izmjeriti*. Posljednja, šesta razina usvojenosti znanja jest *kreiranje*. Kao što i sam naziv govori, učenik treba moći *predložiti, organizirati, sastaviti, pripremiti, formulirati, urediti, kreirati, klasificirati* i *povezati.*

Tablica prikazuje usvojenost geometrijskih pojmova prema Bloomovoj taksonomiji.

Pojam	**Pamćenje**	**Razumijevanje**	**Primjena**	**Analiza**	**Evaluacija**	**Kreiranje**
Točka	imenuje točku, definira točku	prepoznaje točku u ravnini	prikazuje zadane točke na pravcu	razlučuje imenovanu točku od neimenovane	određuje točke koje omeđuju dužinu	povezuje točku na pravcu s postojanjem dva polupravca
Dužina	definira dužinu kao najkraću spojnicu dviju točaka	prepoznaje krajnje točke dužine	prikazuje dužine u trokutu	razlučuje pravilnu od nepravilno označene dužine	procjenjuje i mjeri duljinu dužine	povezuje dužinu sa stranama geometrijskih likova
Pravac	definira pravac kao ravnu neomeđenu crtu	opisuje pravac	prikazuje pravac	razlučuje pravac od dužine	shvaća nemogućnost izmjere duljine pravca zbog njegove neograničenosti	kreira likovni rad koristeći pravce
Polupravac	definira polupravac	opisuje polupravac	vježba crtanje pravca	razlučuje razliku između polupravca i pravca	izabire polupravac na danoj slici/ primjeru	uređuje nepravilno označen polupravac
Trokut	imenuje trokut	opisuje trokut	prikazuje (ilustrira) trokut	eksperimentira s duljinom stranica i veličinom kutova trokuta	predviđa promjene u trokutu s povećanjem ili smanjenjem jednog kuta trokuta	povezuje sliku trokuta s nazivom ovisno o vrsti kuta i duljini strana
Kvadrat	imenuje kvadrat	prepoznaje kvadrat u okružju	izvodi formulu za opseg i površinu kvadrata	razlučuje kvadrat od pravokutnika	procjenjuje i mjeri duljinu strana	crta kvadrat kombinacijom dva pravokutna trokuta
Pravokutnik	definira pravokutnik	prepoznaje kvadrat u okružju	izvodi formulu za opseg i površinu	razlučuje duljinu strana pravokutnika	određuje kvadrat kao poseban pravokutnik	povezuje strane kvadrata s njihovim duljinama
Krug	definira krug	prepoznaje krug u okružju	ilustrira krug	razlučuje promjer od polumjera	mjeri promjer	organizira krugove kako bi dobio sliku
Kružnica	definira kružnicu	prepoznaje kružnicu	ilustrira kružnicu	razlučuje kružnicu od kruga	mjeri polumjer kružnice	organizira kružnice kako bi dobio sliku
Kut	definira kut	prepoznaje kut u geometrijskom liku	prikazuje kut	raspravlja o vrstama kuta	mjeri veličinu kuta	uređuje raspored polupravaca u svrhu sačinjavanja kuta

3.3. Van Hielov model

Dina i Pierre van Hiele 1957. predstavljaju teoriju o razinama podučavanja i savladavanja geometrije nakon što su utvrdili da njihovi učenici imaju poteškoća upravo s usvajanjem tog gradiva. Autori govore da se kroz pet faza može postići uspjeh u učenju i primjeni geometrijskih sadržaja.

Prva faza je *informiranje*. Učenici u ovoj fazi izražavaju svoje dosadašnje znanje o temi koju najavljuje učitelj, a koji na temelju tih informacija uviđa kolika je količina podataka, informacija i gradiva na tu temu poznata i shodno tome pristupa obradi teme. Druga faza je faza *usmjerenog vođenja*. Ova faza bazira se na otkrivanju podataka i informacija koje učenici u prethodnom savladavanju gradiva nisu uočili, a omogućava otkrivanje odnosa među geometrijskim pojmovima. Treća faza je faza *objašnjavanja* u kojoj učenici svojim riječima opisuju što su uočili prilikom izvođenja aktivnosti u prethodnoj fazi, a učitelj ih upućuje na korištenje pravilne matematičke terminologije. Četvrta faza je faza *slobodnog usmjeravanja*. Ova faza povezuje naučeno kroz primjenu na zadacima i rješavanju problema. Posljednja faza je faza *integriranja* koju poznajemo i kao *evaluaciju*- u njoj se objedinjuju sva znanja iz područja koje je naučeno i dolazi do trajnog pamćenja informacija. Autori tvrde da je potrebno poštovati red provođenja faza jer nije moguće savladati fazu *n* ako prethodno nije savladana faza *n-1*.

Pojam koji ne treba izostaviti je *enkapsulacija*. Alexandre Borovik 2007. godine u svom djelu *Mathematics under the Microscope* donosi definiciju enkapsulacije koja odražava zbir svih faza van Hielovog modela, a koja se odnosi na transformiranje matematičkog postupka ili slijeda naučenih radnji u jedan, jedinstveni objekt ne koristeći ponavljanja, već različite pristupe i aktivnosti kojima će pojam ući u dugoročno pamćenje, a njegovo prepoznavanje prijeći u automatizam.

Tablica prikazuje savladavanje geometrijskih pojmova prema van Hielovom modelu.

Pojam	**Informiranje**	**Usmjereno vođenje**	**Objašnjavanje**	**Usmjeravanje**	**Integriranje**
Točka	govore u kojim su se okolnostima susreli s pojmom točke; crtaju, označavaju, opisuju, prepoznaju ju u okružju.	otkrivaju odnose između točke i pravaca u različitim odnosima (paralelni, okomiti, ukršteni pravci), zaključuju o pripadnosti točke pravcu, dužini, krugu	objašnjavaju svoje viđenje odnosa točke i geometrijskih likova, objašnjavaju kako odrediti točku sjecišta, središta	Učenici rješavaju zadatke koristeći prethodno usvojena znanja.	Učenici uz vodstvo učitelja objedinjuju znanja i pohranjuju informacije u dugoročno pamćenje.
Dužina	prepoznaju, opisuju, crtaju dužinu, označavaju krajnje točke dužine, tumače pripadnost dužine pravcu	otkrivaju odnose među dužinama, odnos pravca i dužine, shvaćaju dužinu kao skup točaka, zaključuju o pojavnosti dužine u okružju	svojim riječima objašnjavaju spoznaje o dužinama i njihovim odnosima, imenovanju i mjerenju njihovih duljina		
Pravac	definiraju pravac, povezuju pojam pravca i dužine, prepoznaju (ne)pripadnost točke pravcu.	prepoznaju pravac kao beskonačan niz točaka, prepoznaju odnose među pravcima, ističu sjecište pravaca, shvaćaju beskonačnost pravca	svojim riječima objašnjavaju spoznaje o pravcu, odnosima među pravcima, imenovanju pravaca i pojavnosti pravaca u okružju		
Polupravac	iznose znanja o polupravcu, odnosu pravca i polupravca, nazivu (ishodišne/ početke) točke.	prepoznaju odnose polupravaca, pravaca, dužina, ističu ishodišnu točku, shvaćaju ograničenost s jedne, a beskonačnost s druge strane	svojim riječima objašnjavaju novine u odnosima koje su otkrili u fazi usmjerenog vođenja		
Trokut	iznose osnovna znanja o trokutu, crtaju trokut i označuju vrhove.	promatraju odnose veličina kutova s obzirom na smanjenje/ povećanje veličine jednog kuta, kao i duljine jedne strane trokuta.	objašnjavaju što su otkrili u fazi usmjerenog vođenja i zaključuju da određivanje vrste trokuta ovisi o više faktora		
Kvadrat	opisuju kvadrat i pronalaze predmet oblika kvadrata u okružju	otkrivaju odnose u stranicama i kutovima kvadrata; transformacija u pravokutnik	objašnjavaju da je kvadrat posebna vrsta pravokutnika		
Pravokutnik	iznose znanja o pravokutniku, pojavnosti predmeta oblika pravokutnika u okružju i sličnosti pravokutnika sa spomenutim geometrijskim likovima	zaključuju da je stranica pravokutnika dužina, a da je moguće nacrtati i dužine koje će biti dijagonale pravokutnika, ali i dužine koje će pravokutnik dijeliti na više dijelova	objašnjavaju na koji su način došli do saznanja o postojanju više dužina u pravokutniku i koje su prednosti tih dužina u određivanju sjecišta dužina.		
Krug	iznose znanja o krugu- gdje se pojavljuje u okružju, kako ga nacrtati, što je promjer, a što polumjer kruga	otkrivaju pripadnost točke krugu, određuju središte kruga i promatraju odnose kruga i pravca	objašnjavaju otkrića do kojih su došli putem prethodne aktivnosti, definiraju pravac i polupravac na primjeru		
Kružnica	opisuju kružnicu, označavaju središte kružnice	otkrivaju odnos kruga i kružnice, shvaćaju kružnicu kao skup točaka koji daje privid zatvorene zakrivljene crte	objašnjavaju pripadnost kružnice krugu, ali ne i kruga kružnici; obrazlažu jednakost polumjera kruga i kružnice		
Kut	definiraju kut, određuju njegovu pojavnost u okružju	promatraju utjecaj položaja dvaju polupravaca s istom ishodišnom točkom i zaključuju o vrstama kutova	obrazlažu postojanje više vrta kutova s obzirom na stupanj otvorenosti kuta i razlikuju šiljasti, pravi, tupi, ispruženi i izbočeni kut		

3.4. I-G-S-Z model

Pamela Liebeck (1990) u knjizi *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike* uvodi pojam „I-G-S-Z metode“. Prevedemo li kratice na hrvatski jezik, zaključujemo da su osnovni pojmovi ove metode *iskustvo, govor, slika* i *znak*. Geometrija je specifična jer u nižim razredima osnovne škole ne prelazi bazično razumijevanje, ali i pronalazi primjenu u stvarnosti.

Tablica prikazuje obradu geometrijskih pojmova prema I-G-S-Z modelu.

Pojam	**Iskustvo**	**Govor**	**Slika**	**Znak**
Točka	opisuju gdje su se susreli s točkom, u kojem kontekstu i kako ju prepoznaju	promatraju točku, daju definiciju točke	crtaju točku u ravnini i imenuju ju	označavaju točku
Dužina	povezuju pojam dužine s pojavom u okružju	opisuju dužinu i definiraju ju	crtaju dužinu	označavaju dužinu i duljinu dužine
Pravac	objašnjavaju kako zamišljaju pravac, pokazuju rukama širenje pravca na obje strane	definiraju pravac i opisuju ga	crtaju pravac	zapisuju oznaku pravca
Polupravac	uspoređuju pravac i polupravac, ističu ishodišnu točku	opisuju i definiraju polupravac	Učenici crtaju polupravac	Učenici zapisuju oznaku polupravca
Trokut	primjećuju pojavnost trokuta u okružju, opisuju triangl s kojim su se susreli na Glazbenoj kulturi, opisuju prometne znakove oblika trokuta	definiraju i opisuju trokut, razlikuju vrste trokuta s obzirom na veličine kutova i stranica	crtaju trokut s obzirom na vrstu (veličina kuta ili stranica)	bilježe oznaku za trokut i pravilno ga imenuju
Kvadrat	primjećuju pojavnost kvadrata u okružju, opisuju prometne znakove oblika kvadrata, povezuju poklopac kutije za igračke s oblikom kvadrata	definiraju i opisuju kvadrat	crtaju kvadrat	bilježe oznaku za kvadrat i pravilno ga imenuju
Pravokutnik	primjećuju pojavnost pravokutnika u okružju, opisuju okvir kreveta, vrata učionice, oblik brisala s oblikom pravokutnika	definiraju i opisuju pravokutnik	crtaju pravokutnik i primjećuju da je kvadrat posebna vrsta pravokutnika čije su stranice jednake duljine; povezuju pojam „pravokutnik“ s pojmom „pravog kuta“	bilježe oznaku za pravokutnik i pravilno ga imenuju
Krug	primjećuju pojavnost predmeta oblika kruga u okružju, opisuju prometne znakove, jezero oblika kruga, ogledalo oblika kruga	definiraju i opisuju krug	crtaju krug i primjećuju jednaku udaljenost točaka kružnice koja opisuje krug od središta kruga	bilježe oznaku za krug i središte kruga
Kružnica	primjećuju pojavnost predmeta oblika kružnice u okružju, opisuju obruče s kojima su se susreli na Tjelesnoj i zdravstvenoj kulturi, lastike za kosu oblika kružnice, okvir za sliku oblika kružnice	definiraju i opisuju kružnicu	crtaju kružnicu i primjećuju jednaku udaljenost točaka kružnice od središta	bilježe oznaku za kružnicu i njeno središte
Kut	primjećuju objekte u okružju koji „zatvaraju“/ tvore neki kut; navode kut kojeg zatvaraju dva zida, kut između spojeva strana ploče, kut između spojeva strana razrednog panoa, kut u kvadratu u matematičkoj bilježnici	definiraju i opisuju kut	crtaju razne kutove i upoznaju se s vrstama kuta	bilježe oznaku za kut i pravilno ga označavaju

3.5. Faze razvoja prema Jeanu Piagetu

U djelu *Genetic Epistemology* (1970) Jean Piaget navodi da " ...(matematička) apstrakcija ne proizlazi iz objekata na koje se djeluje, nego iz same akcije. Čini mi se da je to baza logičke i matematičke apstrakcije." Prema Piagetu, nastavnik matematike odgovoran je za poticanje kognitivnog razvoja prilikom podučavanja novog koncepta. Piaget smatra da razvoj pojedinca počinje percipiranjem objekata, radnjama nad njima i promišljanjem o njima. Učenje je, prema Piagetu, podređeno razvojnom procesu koje dijete prolazi. Autori koji su u svom djelu *Taking Shape: Supporting Preschoolers' Acquisition of Geometric Knowledge Through Guided Play* (2013) opisuju važnost igre za savladavanje matematičkih pojmova kod djece vrtićke, ali i školske dobi, u određenoj mjeri podupiru razmišljanje i stav Jeana Piageta. Anderson i Krathwohl 1964. napravili su reviziju faza razvoja prema J. Piagetu koja je i danas zastupljena.

Tablica prikazuje faze razvoja prema J. Piagetu.

Faza razvoja	*Dob*	*Specifičnost razdoblja*
Osjetilni stupanj - motor ili osjetilni motor	Od rođenja do 2. godine	• Eksperimentalne igre • Interakcije s predmetima, ljudima, životinjama • Egocentrično ponašanje
Predoperativni stupanj	Od 2. do 7. godine	• Sposobnost stavljanja *sebe* na drugo mjesto • Smanjen egocentrizam • Razmišljanje temeljeno na asocijacijama
Stadij specifičnih operacija	Od 7. do 12. godine	• Sposobnost razmišljanja i logičkog zaključivanja • Prestanak egocentrizma • Specifične operacije
Stadij formalnih operacija	Od 12. godine	• Korištenje logike u promišljanju • „Razmišljanje o razmišljanju“ • *Hipotetsko deduktivno obrazloženje*

3.6. Usporedba modela

Uspoređujući modele učenja i razvoja djeteta u kontekstu nastave geometrije i formiranju djetetove geometrijske intuicije, zaključujem da su stavovi autora prilično različiti. Kahneman smatra da u ljudskom umu postoje dva sustava, a takvo viđenje nemaju drugi autori. Bloomova taksonomija je gdjekako slična van Hielovom modelu po pitanju razina usvojenosti i konačne sposobnosti pretvorbe informacija u dugoročno pamćenje i služenje istima u različitim fazama života. I-G-S-Z model ima dodirnih točaka s Piagetovom tvrdnjom u kojoj dijete napreduje ovisno o fazi razvoja. I-G-S-Z model primjenjujemo ovisno o kompleksnosti gradiva u određenom razdoblju, odnosno razredu.

Tablica prikazuje usporedbu modela učenja i razvoja djeteta.

Autor	*Važnost slike*	*Važnost zapisa*	*Spominjanje razina*
Kahneman	✓		✓
Bloom	✓	✓	✓
Van Hiel	✓	✓	✓
Liebeck	✓	✓	?
Piaget			✓

Tablica 5. *Usporedba modela prema autorima.*

I-G-S-Z metoda (Liebeck) ne spominje „razine“ savladavanja gradiva, već načine dolaska do spoznaje. Učenici bi shvatili pojam kruga vidjevši prvo sliku, a zatim govoreći vlastito iskustvo, stoga nije nužno da se mora poštovati točno navedeni poredak.

Daljnjom usporedbom modela koje navedeni autori donose, možemo uvidjeti Kahnemanov entuzijazam u kojem do izražaja dolazi samoinicijativnost djeteta koje bi moralo biti mentalno sposobno primijeniti naučene koncepte uz minimalno vođenje, dok Bloom pridaje veću važnost postavljanju čvrstih temelja prilikom učenja pojmova, a kasnije i izgradnje intuicije. Van Hielov model u školstvu možemo shvatiti kao potrebu učenika koji želi biti vođen i nakon postavljanja temeljnih znanja, što bi predstavljalo manju autonomiju učenika u otkrivanju povezanosti sadržaja, odnosno traženje afirmacija za svaki pojedini riješeni zadatak. Tek u konačnoj fazi, integriranju, učenik bi trebao biti sposoban sva stečena znanja formirati u smislenu cjelinu. I-G-S-Z metoda pridaje podjednaku važnost svim aspektima koji trebaju biti zadovoljeni kako bi se razvijala geometrijska intuicija, a bazirana je isključivo na savladavanju sadržaja razredne nastave. Proširivanjem tog modela dobili bismo presliku van Hielovog modela.

4. Alati za postizanje uspjeha

Alati, pomagala i didaktički materijal sastavni su dio rada svakog učitelja, a zadatak učitelja je osmisliti aktivnosti koje će predstaviti učenicima na njima razumljiv i prihvatljiv način. Učenici razredne nastave vole igre, pa uz igre zamišljanja, pogađanja i verbalne igre kojima razvijaju komunikacijske vještine u nastavu valja implementirati i igre u kojima učenici dolaze u fizički kontakt s predmetom, bilo manipulacijom, dodirivanjem, postavljanjem objekata na traženu lokaciju, a u svrhu postizanja zornije predodžbe učenih sadržaja.

Geometrijski elementi koji trebaju biti savladani već su navedeni, a u nastavku slijedi niz dodatnih aktivnosti kojima učitelj pomaže shvaćanju materije, a istovremeno stvara unutarpredmetnu i međupredmetnu korelaciju. Gotovo svaka škola opremljena je dvoranom i školskim dvorištem, a navedene aktivnosti mogu se provoditi i ako je učenicima dostupna samo jedna učionica.

Pojam točke je učenicima teško shvatljiv. Kako nešto može biti tu, a prema definiciji kao takvoj „ne postoji", ali se definira kao mjesto (sjecišta, spajanja, polaska)? Kako bi učenicima približio pojam točke, učitelj može s učenicima posjetiti školski vrt i promatrati cvijeće uz uvjet da promatrano cvijeće ima jasno vidljiv tučak (kao što je slučaj kod tratinčice). Učenici shvaćaju da tučak postoji, vide ga, a učitelj povezuje tučak i točku kao ishodište latica koje predstavljaju svojevrsne polupravce. Učenici na satu Likovne kulture mogu crtati „geometrijske" cvjetove flomasterima na način da tučak bude točka obojana žuto radi lakše predodžbe, a latice raznobojni polupravci čija je ishodišna točka tučak. Učitelj može ostaviti otvorenu mogućnost prolaska pravca točkom koja taj pravac dijeli na dva polupravca. Budući da su učenici bili u doticaju sa svijetom koji ih okružuje, možemo govoriti i o međupradmetnoj temi *Osobni i socijalni razvoj*. Učitelj može potaknuti učenike da u slobodno vrijeme istraže biljke koje imaju kod kuće čime potiče boravak u prirodi, pa možemo govoriti o međupredmetnoj temi *Zdravlje*.

Dužina je konkretan pojam koji učenici mogu shvatiti kroz niz aktivnosti. Igra koja bi mogla biti provedena u školskoj dvorani je određivanje dužina na samom podu dvorane. Većina školskih dvorana ima već oslikane podove koji predstavljaju granice sportskih terena, pa je tako teren za mali nogomet oblika pravokutnika, ali je zato istaknuti element košarkaškog terena polukrug, odnosno luk s kojeg igrač pokušava zabiti *tricu*, pogodak koji njegovoj momčadi donosi tri boda. Učitelj može zadati zadatak u kojem učenici trebaju razlikovati dužine prema označenim linijama. Spajajući definiciju i praktični dio, a ujedno formirajući i geometrijsku intuiciju, učenici će povezati da su strane malonogometnog terena ravne, te imaju početne i završne točke koje učitelj može dodatno istaknuti čunjevima ili loptama *medicinkama*. Ponovno dolazimo do korelacije s Tjelesnom i zdravstvenom kulturom, ali i izražajnijeg utjecaja međupredmetne teme *Učiti kako učiti* koje motivira učenike na svjesnost svojih odabira i potrebe mijenjanja metoda i pristupa ako sadržaj nije savladan, a to se može dogoditi praćenjem rada vršnjaka ili pronalaskom dodatnih materijala koji će učeniku biti od koristi.

Trokut je, kao što je rečeno, geometrijski lik. Kako bi učenici trokut kao takvog shvatili, treba ih potaknuti na međusobnu suradnju podjelom u grupe od po tri učenika. Svaka grupa u trenutku može mijenjati pozicije svojih članova, a samim time se mijenja i oblik, veličina i vrsta trokuta. Učitelj može učenicima osigurati školsku kameru kako bi se članovi grupa međusobno fotografirali iz *ptičje perspektive* provodeći vježbu *Čudnovati trokut*, a fotografije učitelj može ispisati i podijeliti učenicima čiji zadatak treba biti povezati stopala, glave ili nosove učenika na fotografijama kako bi dobili trokut. Korištenjem tehnologije u radu spoznajemo utjecaj međupredmetne teme *Uporaba informacijske i komunikacijske tehnologije* koja učenicima *novog doba* zasigurno dobro dođe. Bloomov model u svojoj konačnici ima kreiranje, a učenici ovom aktivnošću čine upravo to.

Pravokutnik smo spomenuli govoreći o malonogometnom terenu, pa isti možemo ponovno iskoristiti. Zadatak učenika može biti pravocrtno trčanje od linije do linije kako bi se stvorio dojam paralelnosti stranica. Također, učenici mogu istraživati oslikane kutove i uspoređivati ih s kutovima koje pronalaze na drugim spravama u dvorani, kao što su okvir švedskog sanduka, strunjača ili švedske ljestve. Poticanjem na fizičku aktivnost i zajednički rad, igru možemo povezati s međupredmetnim temama *Zdravlje* i *Osobni i socijalni razvoj*.

Kvadrat učenici mogu *osjetiti* igrom *Pronađi me u hodniku*. Zadatak učenika je da u parovima prouče elemente koji se pojavljuju na hodniku a oblika su kvadrata i podignu ruku kada su takav predmet pronašli. Primjer za to bio bi okvir zidne slike, pločice na podu ili oznaka razreda na vratima učionice. Rad u paru najavljuje da je ova aktivnost primjer međupredmetne teme *Građanski odgoj i obrazovanje*. Stadij specifičnih operacija koje traje od sedme do dvanaeste godine, a o kojem govori Piaget odnosi se upravo na specifične radnje koje su učeniku zadane s pravim i konkretnim smjernicama.

Krug i kružnica ponovno se pojavljuju na sredini poda školske dvorane, ali i u učionici. Igrom *Kružiš me?* učitelj treba učenike uputiti na pronalaske predmeta oblika kruga, a na primjeru pronađenih predmeta koristeći prethodno pripremljenu vunu pokazati zatvorenu zaobljenu liniju koju nazivamo kružnica, a koja omeđuje krug. Idealan primjer za to je učionički sat, ali i strana pernice koja je oblika valjka, a kojoj je kružnica ujedno i šav. Samostalnim pronalaženjem sadržaja dolazimo do međupredmetne teme *Učiti kao učiti*.

Ravninu učenici moraju spoznati kao ravnu plohu. Korištenjem didaktičkih materijala kao što su geometrijska tijela dobivena uz udžbenički komplet, učenici trebaju postaviti običan bijeli papir standardnih dimenzija (A4) na stranu geometrijskog tijela koju trebaju pridružiti nekoj ravnini. Primjerice, učitelj označi vrhove kocke bojama, koristeći drugu boju za svaki vrh. Uzmimo da su crveno, plavo, zeleno i žuto obojeni vrhovi vidljivi i kao točke kvadrata koji je jedna strana kocke. Papir će učenici trebati postaviti tako da navedeno obojani vrhovi i strana kocke budu pritisnuti, naslonjeni na papir. Papir mogu postaviti okomito, vodoravno, ili ga pak držati u zraku. Bitno je da papir bude ravan, a to učitelj mora više puta naglasiti. Međupredmetna tema koju možemo primijetiti je *Učiti kako učiti*.

Kocka i kvadar su geometrijska tijela čije razlikovanje nakon obrade na satu provodeći već klasične, udžbenikom predložene aktivnosti učitelj može unaprijediti korištenjem materijala dostupnim u učionici. Potrebno je raspolagati kutijama s likovnim priborom (kutije za cipele oblika kvadra), igraćim kockama iz seta za igru, Rubikovom kockom iz kutka za igru, drvenim kockama s napisanim slovima i brojevima za učenje čitanja i računanja, te Jenga igrom čiji su dijelovi oblika kvadra. Igra koju učitelj može predstaviti djeci može biti *Pravi kut u pravom kutu*, a zadatak učitelja je skriti što više navedenih i sličnih predmeta u kutove učionice (na pod, na ormar koji se nalazi u kutu, na rub ploče ako ista dodiruje kut učionice...), no učenicima ne treba odmah reći je igru tako nazvao. Učenici pronađene predmete trebaju donositi u kutiju oblika kocke i kutiju oblika kvadra pazeći da predmete oblika kocke stavljaju u prvu, a oblika kvadra u drugu kutiju. Kada učenici pronađu sve predmete, učitelj treba učenike uputiti na promatranje čitave učionice koja je oblika kvadra. Prostorno gledano, učenici i učitelj nalaze se *unutar* kvadra, a predmeti koje su tražili prepoznavali su prema *vanjskim* karakteristikama. Ova igra povezuje Matematiku, Hrvatski jezik i Prirodu i društvo zbog geometrijskih, jezičnih i prostornih komponenti koje ju sačinjavaju. Međupredmetna tema koju učitelj ovom igrom osigurava je *Poduzetništvo*. Ova je igra primjer I-G-S-Z modela u kojem su zadovoljeni svi kriteriji koje zadaje Liebeck.

Igru *Pravi kut u pravom kutu* učitelj može prilagoditi i prilikom savladavanja i razlikovanja piramide i stošca. Umjesto prethodno navedenih kocke i kvadra, učitelj treba predmete oblika piramide i stošca suptilno postaviti u školskom dvorištu ili vrtu na kojima se prethodno ti predmeti nisu nalazili (pazeći na sigurnost učenika prilikom izvođenja zadatka, odnosno potrage). Učitelj treba učenicima napomenuti koje područje trebaju pretražiti, a kada predmet nađu, trebaju ga staviti u kutiju koja na sebi ima zalijepljeno isprintano geometrijsko tijelo (piramida ili stožac). Predmeti koji se mogu sakriti su mali čunj, geometrijsko tijelo dobiveno u didaktičkoj kutiji uz udžbenički komplet, minijaturna piramida zdrave prehrane, *Rubikova piramida* (inačica Rubikove kocke oblika piramide), papirnata rođendanska kapica, ukras oblika stošca izrađen od stiropola... Učenici su ovom aktivnošću uspješno ostvarili ishod međupredmetne teme *Održivi razvoj*. Kahnemanov kriterij prepoznavanja temeljem slike može se primijeniti na ovoj igri.

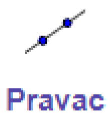
Kugla je učenicima vjerojatno najbliže i najpoznatije geometrijsko tijelo, a igra kojom učenici mogu utvrditi prepoznavanje kugle je kuglanje. U školskoj dvorani učitelj treba postaviti čunjeve koje učenici trebaju srušiti kotrljanjem lopte po podu. Učenike treba rasporediti u skupine ovisno o sveukupnom broju učenika u razredu i nadzirati svako bacanje kugle u čunjeve. Učenik koji uspije srušiti sve čunjeve osvaja jedan bod za svoju ekipu, a bod pretvorbom postaje slovo. Potrebno je skupiti pet bodova za pobjedu jer se u riječi *kugla* nalazi pet slova. Prva ekipa koja skupi pet bodova treba uzviknuti *„Kugla!“*, u suprotnom im se oduzima jedan bod. Međupredmetna tema je *Učiti kako učiti* sa značajnim ishodom teme *Osobni i socijalni razvoj*.

Ono u što učitelj može biti siguran je činjenica da je provodeći ove aktivnosti dao sve od sebe kako bi van Hiele bio zadovoljan konačnim ishodom, a to je integriranje.

GeoGebra je besplatan i dinamičan softver korišten u matematici radi zornijeg dočaravanja učenih pojmova u stvarnom vremenu koristeći uzročno-posljedične veze. Velik dio prikaza odnosa elemenata u ovom radu stvoreni su u GeoGebri, a u nastavi ih možemo koristiti kako bi učenici mogli steći dojam o dinamičnosti geometrije i načelima prema kojima funkcionira. GeoGebra se može koristiti i za složenije zadatke, no za osnovnu razinu spoznavanja i postepenog razvijanja geometrijske intuicije, učenici mogu stvarati geometrijske likove radom na školskim tabletima s pristupom internetskoj mreži. Alati GeoGebre koji bi učenicima bili korisni u savladavanju nastavnih sadržaja su sljedeći:

a) Točka u ravnini i pripadajuće koordinate točke

b) Pravac određen dvjema točkama

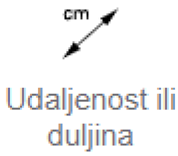


c) Crtanje dužine

d) Crtanje mnogokuta (počevši od trokuta) i pravilnih mnogokuta

e) Crtanje kružnice određene dvjema točkama ili zadanim radijusom

f) Mjerenje udaljenosti dviju točaka



GeoGebra je predstavljena kao internetska stranica, no postoji i kao aplikacija koja se može preuzeti na pametne uređaje ovisno o operacijskom sustavu koji uređaj koristi.

5. Razvijanje geometrijske intuicije

Ovo poglavlje predstavit će problemske zadatke s kojima se u udžbenicima koje je odobrilo Ministarstvo susreću učenici razredne nastave na satovima Matematike, kao i aktivnosti koje se u užem ili širem kontekstu provode kako bi učenici lakše savladali temeljne geometrijske pojmove, geometrijska tijela i likove.

Ponekad u stvarnom životu želimo nešto izmjeriti, a ravnalo, metar ili trokut nam nisu pri ruci. Učenicima želimo objasniti i dočarati da nije nužno izmjeriti dužinu kako bi istu duljinu prenesli na neki pravac. Podsjetimo se načina prenošenja dužine na pravac koji je opisan u udžbenicima za osnovnu školu.

„Nacrtaj pravac *a* i na njemu istakni dvije točke, imenuj ih A i B. Na pravcu si istaknuo dužinu AB. Nacrtaj drugi pravac, pravac *b* i na njemu istakni jednu točku. Imenuj tu točku A. U šestar uzmi veličinu od točke A do točke B s pravca *a*. Iglu šestara ubodi u točku A na pravcu *b*. Grafitnim dijelom šestara obilježi točku B na pravcu *b*. Dužina AB na pravcu *a* jednake je duljine kao i dužina AB na pravcu *b*."

Iako logično, učenici postavljaju pitanje *kada će mi to trebati?* na što im možemo odgovoriti primjerom koji će probuditi njihovu geometrijsku intuiciju u budućnosti:

Zamislimo da želimo izmjeriti udaljenost između olovke i brisala u pernici bez ravnala, metra ili trokuta. Ako uzmemo udaljenost od jednog do drugog predmeta „među prste" na način da je palac pozicioniran na mjesto olovke, a kažiprst na mjesto brisala, ne dobivamo valjani rezultat jer podizanjem dlana s pernice mišići šake mijenjaju poziciju prstiju i udaljenost koju pokazujemo više nije stvarna udaljenost među predmetima, već postoji odstupanje. Ako uzmemo konac čiji početak postavimo na mjesto brisala, napnemo ga i šestarom lociramo mjesto olovke, a zatim prenesemo „dohvaćenu" duljinu na pravac u bilježnici prethodno opisanim postupkom, dobivamo točnu udaljenost između ta dva predmeta. U većem mjerilu mogli bismo govoriti o udaljenosti među klupama, stolcima, školskim ormarima- a za takvo prenošenje dužina trebalo bi nam platno većih dimenzija i trokut sličan onom koji se nalazi u ormaru s geometrijskim priborom.

2.4.2. Trokut u okolini

Pojam trokuta usvojen na prethodno opisan način daje definiciju geometrijskog lika koji ima tri strane i tri vrha. No, gdje u okružju učenici mogu primijetiti trokut? Fizički predmeti koje učenici mogu uočiti su prozori na učionici koje dijagonala (koju predstavlja komad napete vune) dijeli na dva trokuta. Također, moguće je pokazati i primjer prozora koji je **oblika trokuta.** Kako bismo učenicima dočarali da je trokut *geometrijski lik*, moramo inzistirati na dosljednosti korištenja ispravnih matematičkih izraza- stoga prozor nije trokut, već je prozor oblika trokuta. Prometni znakovi koje učenici upoznaju na nastavi Prirode i društva također su *oblika trokuta*. Komad popularne hrane nije trokut *pizze*, već je komad *pizze* oblika trokuta.

2.6.1. Pravokutnik u okolini

Predmete oblika pravokutnika možemo primijetiti gotovo posvuda oko nas. Učenici mogu potaknuti formiranje temelja geometrijske intuicije promatranjem tlocrta škole, stana, kuća, mogu doživjeti školsko igralište pravokutnog oblika i korelacijom s nastavom Tjelesne i zdravstvene kulture i na praktičan način usvojiti gradivo susjednih i nasuprotnih vrhova. Vrhove možemo označiti čunjevima, *kapicama*, loptama ili manjim obručima- no treba naglasiti da je vrh točka (koju su učenici ranije upoznali) i da su položeni predmeti postavljeni kako bi poimanje bilo jednostavnije. Proučavanje zastava većine država svijeta daju uvid u korištenje ravnine oblika pravokutnika.

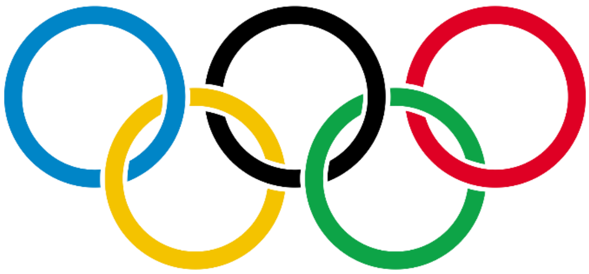
2.7.1. Kvadrat u okolini

Predmeti pomoću kojih učenici mogu lakše povezati pojam kvadrata s njegovim izgledom jesu poklopac za pećnicu oblika kvadrata i kutija za poklon čije su stranice oblika kvadrata- moramo biti oprezni i precizni kako bi učenici uistinu usvojili pojam kvadrata i ne miješali ga s pojmom pravokutnika, čak i ako znamo da je kvadrat posebna vrsta pravokutnika. U spoznavanju i raspoznavanju pojmova moramo krenuti od osnova, a do prethodne definicije dolazimo u kasnijim razdobljima (kada su pojmovi i raspoznavanje usvojeni).

Ako je moguće, kao primjer kvadrata možemo iskoristiti i prirodu- postoje bakterije čije su stanice oblika kvadrata. Učenici se mogu služiti mikroskopom i na jedinstven način upoznati pravilnosti koje stvara priroda. Također, postoje i minerali koje učitelj može koristiti kako bi predočio plohu oblika kvadrata, a to je mineral pirit koji je dostupan i u slobodnoj prodaji.

2.9.1. Krug u okolini

Učenici poimaju krug u gotovo svakom trenutku. Sat doživljavaju kao krug, kao i svjetla na semaforu ili tanjur za rođendansku tortu. Međutim, krug možemo dočarati i kao spomenuti dio valjka. Sat u učionici je valjak čije baze, krugove, uočavamo promatranjem sata s prednje ili stražnje strane. Ako sat pogledamo iz smjera paralelnog s bazama, nećemo više vidjeti krug, već najčešće pravokutnik (ovisno o udaljenosti sata od promatrača). Primjer uočavanja kruga je i vir koji se često pojavljuje u rijekama, a možemo ga proizvesti i sami pomoću zdjele u kojoj se nalazi voda. Bitno je objektom (palicom, štapićem) raditi kružne pokrete rukom ispod površine vode kako bi se pojavio vir. U tom je primjeru jasno vidljiva kružnica koja omeđuje krug. Također, učenici mogu raditi u paru- zadatak bi zahtijevao promatranje zjenica svoga para. Zjenice su oblika kruga, a linija koja ih okružuje može se smatrati kružnicom koja *ne pripada* krugu jer se razlikuje bojom. Jedan od najpoznatijih primjera kruga je znak Olimpijskih igara koji se sastoji od pet krugova koji su međusobno povezani i „ulaze“ jedni u druge. Učenici bi unutar prstena mogli označiti središte kruga i kružnice, a na kraju i obojati krugove bojama kojima su obojani i pripadajuće kružnice, odnosno prsteni.



Slika 23. Olimpijski krugovi

Učenici mogu zamijetiti krug i na kotačima automobila (naplatci), ali i na poleđini vlastitih likovnih mapa na kojima je često prikazan spektar boja raspoređen u obliku kruga.

Slika 24. Krug boja

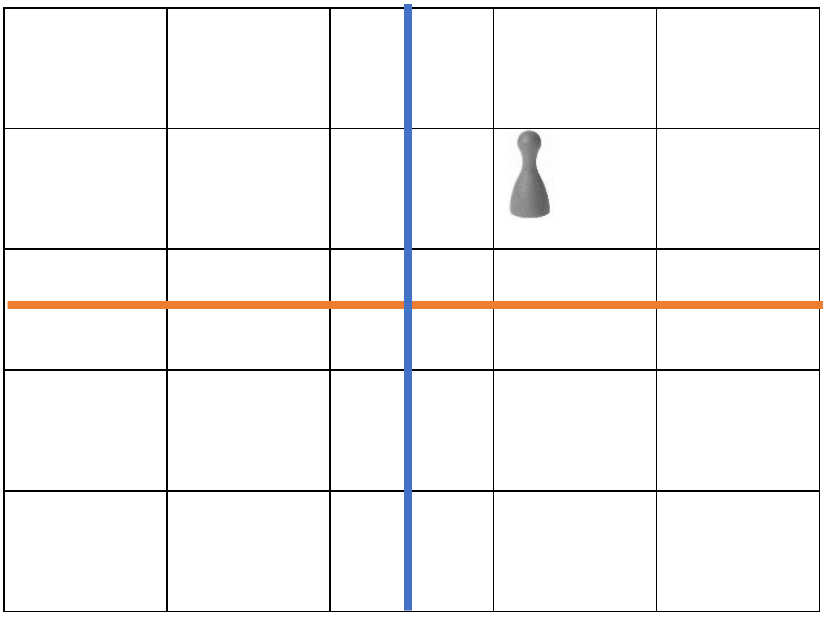
2.5.1. Kut u okolini

Kut u okolini možemo prikazati na bezbroj primjera kako bismo u učenicima potaknuli javljanje geometrijske intuicije. Eksperimentiranjem s položajem otvorenih vrata učenici shvaćaju da se veličina kuta povećava kada vrata otvorimo više (od dovratnika), a smanjuje kada vrata privlačimo prema dovratniku. Ploča je (uglavnom) pravokutnog oblika. Promatramo li jednu dulju i jednu kraću stranicu koje se sijeku, možemo učenicima pokazati kako izgleda pravi kut. Također, promatranjem naličja stola učenici mogu uvidjeti da kut što ga zatvara školska klupa i jedna noga koja je na klupu pričvršćena iznosi 90 stupnjeva, a takav kut nazivamo *pravi kut*. Fotografija sladoleda u kornetu može nam poslužiti kao primjer šiljastoga kuta kada promatramo kornet.

2.10.1. Ravnina u okolini

Kao što je prethodno navedeno, ravninu možemo uočiti posvuda. Učenicima ravninu možemo objasniti pomoću jednostavnog bijelog papira. Kada ga postavimo na školsku klupu, on zadržava svoju formu- ostaje ravan. Iako ga možemo dodirnuti i gledajući profil dokazati da papir ima određenu debljinu, iako ne preveliku, učenicima ne ukazujemo na tu njegovu dimenziju, već na ravnu formu koja ga odlikuje. Kada bismo do postavljenog papira dodavali nove papire (jednakih dimenzija) bez praznog međuprostora, učenici bi dobili dojam širenja ravnine. Aktivnost koju možemo provesti kako bismo dokazali da je ravnina skup točaka kojima možemo pronaći točnu lokaciju opisana je u slikovnom primjeru.

Pripremljene papire bez praznog međuprostora pričvrstimo na stol trakom. Pomoću četiri krojačka metra obilježimo okomite pravce koji će predstavljati koordinatni sustav x i y osi. Svaki krojački metar ima početnu točku (ishodište) u točki T(0,0) kako bi učenici dobili dojam beskonačnosti u sva četiri smjera. Zadatak učitelja je na krojačkom metru koji predstavlja negativni dio x i y osi označiti znak minus ispred brojeva kako učenici ne bi stekli dojam pozitivnog predznaka koordinate gdje ga ne treba biti. Igraće figure po vlastitom odabiru postavimo na nasumično mjesto na proizvoljno odabranom papiru i određujemo koordinate točke na kojoj se nalazi figura. Primjer prikazuje postavljenu sivu igraću figuru u koordinatnom sustavu koja je postavljena na točku čije koordinate treba pronaći.



Slika 25. Lociranje točke u koordinatnom sustavu.

2.11.1. Kocka u okolini

Kocka je jedan od najzastupljenijih geometrijskih tijela po čijem se uzoru (obliku) izrađuju predmeti koje koristimo u svakodnevnom životu. Učionica u kojoj učenici sudjeluju u nastavi matematike treba biti opremljena raznom opremom, pa tako i 3D modelima geometrijskih tijela kao didaktičkim materijalom. Učenicima prikazujemo „stvaranje“ kocke iz geometrijske mreže kvadrata koje „građenjem“ spajamo u oblik kocke. Aktivnosti koje učenici mogu provesti, a koje bi pomogle razvijanju svijesti o pojavnosti kocke u prostoru i značajkama kocke jesu pronalazak predmeta oblika kocke- kutija za pohranu likovnog pribora, ormar oblika kocke, igraće kocke, Rubikova kocka. Suradnju ostvarujemo i sa školskom kuhinjom iz koje možemo uzeti led oblika kocke iz kalupa predviđenog za izradu, ali i šećer koji može biti pakiran u obliku kocke. Učenici će se od malih nogu susretati s igraćim kockama za slaganje i modeliranje, pa je svakako dobro uzeti i njih kao primjer predmeta s kojim su već upoznati, a ima obilježja (oblik) kocke.

2.12.1. Kvadar u okolini

Predmeti oblika kvadra čak su i češći od predmeta oblika kocke. Kvadar možemo prepoznati u predmetima kao što su ormari, kutije, zgrade, pa čak i građevinski materijal poput cigle ili razvodne kutije. Učenici kvadar mogu shvatiti i kao „kocku na koju je netko sjeo“ jer ih podsjeća na promjenu oblika forme lopte kada netko na nju sjedne. Važno je napomenuti da, za razliku od lopte, strane kvadra ostaju ravne i sačuvani su pravi kutovi na mjestu spajanja okomitih stranica.

2.13.1. Piramida u okolini

Izuzev didaktičkog materijala pomoću kojeg kreiramo piramidu koja je najčešće trostrana ili četverostrana, učenicima valja pokazati i stvarne primjere u kojima se mogu susresti s piramidom. Najpoznatiji primjer su, naravno, piramide u Egiptu.

Korelirajući s nastavom Prirode i društva i međupredmetnim temama Održivi razvoj i Osobni i socijalni razvoj možemo implementirati povijesni aspekt važnosti nastanka piramida na nekom području i dodatno motivirati učenike na prepoznavanje, imenovanje i mentalnu predodžbu piramida.

2.14.1. Stožac u okolini

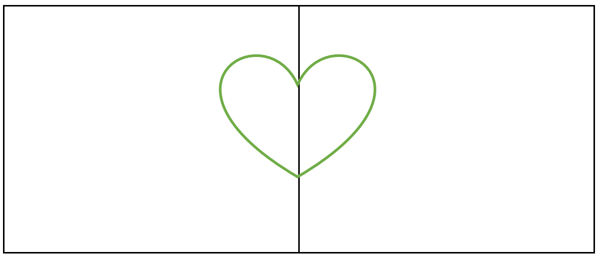
Učenicima najpoznatiji primjer stošca je vjerojatno kornet za sladoled. Međutim, kada bismo uzeli kornet kao primjer stošca, morali bismo pričvrstiti karton oblika kruga koji bi imao ulogu baze. Idući primjer koji možemo pokazati učenicima jest prometni čunj. Sat Tjelesne i zdravstvene kulture možemo prilagoditi i kreirati poligon u kojem će učenici morati savladavati prepreke koje uključuju male čunjeve nalik prometnima, a koji su dostupni u školskoj dvorani. Često se na maketama i prikazima reljefa vulkani pojavljuju u obliku čunja. Stvarajući suradnju s predmetnim nastavnikom Geografije, možemo učenicima pokazati i taj primjer.

2.15.1. Kugla u okolini

Najpoznatiji primjer predmeta oblika kugle jest lopta. Učenici se u svakodnevnim aktivnostima susreću s loptom, pa tu prednost treba i iskoristiti. Loptu možemo nesmetano kotrljati ravnom površinom čime dokazujemo nepostojanje vrhova i bridova. Uzmemo li krojački metar i izmjerimo opseg lopte neovisno o njenom položaju, vidimo da su mjere podudarne, odnosno jednake. Prilikom izvođenja te aktivnosti valja biti oprezan i odabrati loptu koja nema nikakvih udubljenja ili nepravilnosti. Idući primjer kojim možemo potaknuti suradnju učenika jesu mjehurići od sapunice. Iako nisu izdržljivi kao lopta, mjehurići mogu pokazati jednaku udaljenost među točkama koje leže na pravcima koji prolaze središtem upravo zbog svoje providnosti. Budući da se mjehurići sapunice dobivaju miješanjem tekućeg sapuna ili deterdženta s vodom, možemo učenicima pokazati i trodimenzionalni model molekule vode. Atomi koji čine molekulu vode su oblika kugle, pa ih učenici mogu pokušati i sami izraditi na satu Likovne kulture koristeći plastelin povodom prigodnih dana, kao što je Dan vode. Obilježavanjem istaknutih dana u godini možemo postići štošta u razvoju geometrijske intuicije, pa tako i u novogodišnjem razdoblju možemo pokazati snježne kugle sa zimskim motivima.

2.16.1. Simetrija u okolini

Učenici mogu spoznati simetriju na razne načine. Uzmimo na primjer ilustraciju srca. Uvijek nastojimo nacrtati ili naslikati simetrične strane srca, no postoji i lakši način za postizanje simetrije upravo na tom crtežu. Povodom rođendan, Valentinova ili sličnih dana možemo s učenicima izrađivati čestitke. Uzmemo li papir, savinemo li ga na pola kako bismo dobili dvije polovine jednakih dimenzija i nacrtamo jednu stranu srca, neovisno lijevu ili desnu, a zatim škarama izrežemo polovicu srca prateći nacrtanu liniju dok je papir presavijen, a škare obuhvaćaju obje polovine lista, dobivamo simetrične strane srca.

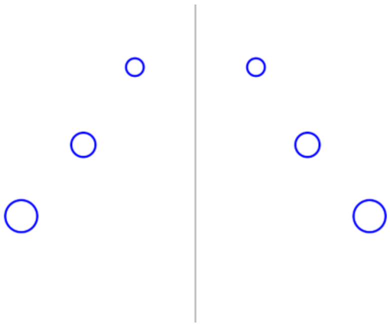


Slika 26. Osna simetrija

Aktivnost kojom možemo učenicima približiti značajke centralne simetrije jest igra povlačenja konopa. Konop duljine točno četiri metra uhvatimo za krajeve koje spojimo. Mjesto koje tvori svojevrsno ishodište dobivenih polupravaca precizno označimo crvenom vrpcom. Kada konop vratimo u prvobitni (ravni) položaj, učenici vide da se vrpca nalazi na polovici konopa, to jest na 2 metra udaljenosti od početka, odnosno od kraja konopa. Promatrano valja potvrditi i mjerenjem.

Slika 27. Centralna simetrija

Aktivnost za savladavanje i usvajanje planarne simetrije provodimo pomoću čunjeva koje smo koristili u definiranju geometrijskih likova u ravnini. Kada bismo postavili švedski sanduk koji predstavlja plohu, odnosno ravninu, učenici bi s lijeve i desne strane sanduka na jednakoj udaljenosti od istog trebali postaviti čunjeve. Udaljenost mogu određivati brojem koraka ili duljinom konopa za preskakivanje.



Slika 28. Planarna simetrija

Mnogo je aktivnosti kojima bismo učenike mogli zainteresirati za promatranje simetrije u prostoru, u vlastitom okružju. Snježne pahulje, leptiri, cvijeće i zrcalo spadaju u dio primjera kojima možemo dokazati postojanje simetrije i njenu važnost u životu, umjetnosti, pa i matematici.

6. ZAKLJUČAK

Geometrijska intuicija je spoznaja o svijetu koji nas okružuje. Aktivnosti koje učitelj provodi na satu Matematike trebaju biti raznovrsne kako bi učenici pohranili osnovne informacije u dugoročno pamćenje, a kasnije te informacije povezali s novim pojmovima i povezali ih s predmetima i pojavama u okolini. Usporedbom Kahnemanovih Sustava, Bloomove taksonomije, Van Hielovog modela, I-G-S-Z metode i pregledom faza razvoja prema Jeanu Piagetu, utvrđujemo da je praćenju razvijanja geometrijske intuicije moguće pristupiti s više stajališta. Svaki od navedenih autora predlaže drugačiji koncept shvaćanja razvoja, no svi se u srži svode na isto- raznolike aktivnosti trebaju motivirati učenika kako bi i on samoinicijativno preispitivao svijet oko sebe i posvetio se kreiranju novih sadržaja i promijenio perspektivu promatranja vlastite okoline. Svaki osnovni element, ravninski lik ili geometrijsko tijelo moguće je prikazati na nebrojeno načina, a zadatak učitelja je posvetiti svoj rad učeničkom shvaćanju osnovnih koncepata kako bi u budućnosti iste mogao nadograđivati i prilagođavati vlastitom uzrastu. Igre su ključan element u razrednoj nastavi, stoga ih treba znati pravilno postaviti, formulirati zadatak i prepustiti učenicima da istražuju na novi način i novim strategijama. Iako bogati, udžbenički kompleti nisu dovoljan izvor znanja, već ih možemo shvatiti kao podsjetnik. Učenici će zapamtiti građenjem, a graditi može samo ako ima dobro postavljene temelje.

7. LITERATURA

Bloom, B. (1956). Taxonomy of Educational Objectives. London: Longmans, Green & Co.

Borovik, A. (2007). Mathematics under the Microscope. Manchester: Manchester Institute for Mathematical Sciences- School of Mathematics.

Bujanović, Z. i Muha, B. (2021). Elementarna matematika 2. [Internet], <raspoloživo na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/em/em2/materijali/predavanja/EM2-nesluzbena-skripta.pdf> [30.6.2024.]

Červar, B.; Erceg, G.; Lekić, I. (2014). Osnove geometrije, nastavni materijal. Split: Prirodoslovni matematički fakultet u Splitu.

Dennis, C. (2004). Square bacteria grown in lab for the first time. *[Internet]*, <*raspoloživo na:* https://doi.org/10.1038/news041011-3> [26.6.2024.]

Freudenthal, H. (2002). Revisiting mathematics education. New York: Kluwer Academic Publishers.

Hilbert, D., (1950), Foundations of Geometry. [Internet], <raspoloživo na: https://users.fmf.uni-lj.si/lavric/Hilbert%20-%20The%20Foundations%20of%20Geometry.pdf>, [25.6.2024.]

Hrvatski jezični portal, (2020). [Internet], <raspoloživo na: https://hjp.znanje.hr/index.php?show=search_by_id&id=elZmXRI%3D&keyword=kvadrat> [25.6.2024.]

Kadum, V. (2006). Matematička intuicija u nastavi matematike. [Internet], <raspoloživo na: https://hrcak.srce.hr/file/7161>, [1.7.2024.]

Kahneman, D. (2013). Misliti, brzo i sporo. Zagreb: Mozaik knjiga.

Liebeck, P. (1990) Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike. Zagreb: Educa.

Piaget, J. (1970). Genetic Epistemology. New York: The Viking Press, Inc.

Rougeux, N. (2022). Byrne's Euclid. [Internet], <raspoloživo na: https://www.c82.net/euclid/#books>

Soucie, T. i Katalenac, I. *Matematika 5*. [Internet], <raspoloživo na: https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/2259140/index.html>, [22.6.2024.]

8. PRILOZI

9. SAŽETAK

Ovaj diplomski rad bavi se shvaćanjem učeničkog usvajanja geometrijskih sadržaja obraćajući pažnju na aspekte odrastanja i razdoblja u kojem se učenici nalaze. Autori koji su bili temelj ovog diplomskog rada zbog svog doprinosa geometriji su Daniel Kahneman, van Hiel, Pamela Liebeck i Jean Piaget. Pojmovi koje obrađujem u ovom radu su osnovni geometrijski pojmovi, ravninski likovi i geometrijska tijela. Svaki pojam objašnjen je definicijom i kreativnim, ali i suvremenim rješenjima kojima učitelj može djelovati na formiranje geometrijske okoline svojih učenika u razrednoj nastavi, ali i u daljnjem životu. Stavljanjem pojmova u stvarnu okolinu dobivamo dojam dubine geometrije, njezinu pojavnost u stvarnom svijetu i ulogu u razvitku čovjeka, društva, prirode, arhitekture.

Ključne riječi: matematika, geometrija, geometrijski likovi, geometrijska tijela, Bloomova taksonomija, Pierre Van Hiele, Daniel Kahneman, Pamela Liebeck, Jean Piaget, intuicija

10. ABSTRACT

This graduate work deals with the understanding of students' acquisition of geometric content while paying attention to the aspects of growing up and the period in which the students are. The authors who were the basis of this thesis because of their contribution to geometry are Daniel Kahneman, van Hiel, Pamela Liebeck and Jean Piaget. The terms I deal with in this paper are basic geometric terms, plane figures and solids. Each term is explained with a definition and creative, but also modern solutions with which the teacher can influence the formation of the geometric environment of the students in his class, but also in further life. By placing concepts in the real environment, we get an impression of the depth of geometry, its appearance in the real world and its role in the development of man, society, nature, and architecture.

Keywords: mathematics, geometry, geometrical shapes, Bloom's taxonomy, Pierre Van Hiele, Daniel Kahneman, Pamela Liebeck, Jean Piaget, intuition