Sličnost trokuta, Tales i računanje visina u razrednoj nastavi

Udovičić, Karla

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

KARLA UDOVIČIĆ

SLIČNOST TROKUTA, TALES I RAČUNANJE VISINA U RAZREDNOJ NASTAVI

Diplomski rad

Pula, 19. veljače 2019.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

KARLA UDOVIČIĆ

SLIČNOST TROKUTA, TALES I RAČUNANJE VISINA U RAZREDNOJ NASTAVI

Diplomski rad

JMBAG: 0303039628, redoviti student

Studijski smjer: Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij

Predmet: Metodika nastave matematike II

Znanstveno područje: Društvene znanosti

Znanstveno polje: Posebne pedagogije

Mentor: doc. dr. sc. Sandra Kadum

Pula, 19. veljače 2019.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisana Karla Udovičić, kandidat za magistra primarnog obrazovanja ovime izjavljujem da je ovaj Diplomski rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Diplomskog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

____

U Puli, _________, ________ godine

IZJAVA

o korištenju autorskog djela

Ja, Karla Udovičić dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj diplomski rad pod nazivom „Sličnost trokuta, Tales i računanje visina u razrednoj nastavi“ koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, _______________ (datum)

Potpis

____

Sadržaj:

1. Uvod

Sličnost trokuta kao nastavna tema prilagođena je za obradu u višim razredima osnovne škole, točnije za sedmi razred. Obradom učenici trebaju usvojiti pojam sličnosti trokuta, znati poučke o sličnosti trokuta, izračunati duljine stranica, opseg i površinu sličnih trokuta. S obzirom na to da je sličnost trokuta usko povezana sa Talesom i njegovim mjerenjem visine Keopsove piramide u Gizi, ta se tema na zanimljiv način vrlo jednostavno može integrirati s predviđenim gradivom. Iako je tema prilagođena za više razrede, pokušaj njenog prilagođavanja učenicima nižih razreda, točnije četvrtom razredu osnovne škole, tema je koja se proteže kroz ovaj rad.

Tales je za mjerenje visine piramide koristio teorije koje je dokazao vrlo jednostavnim instrumentima koji mogu, s obzirom na današnju tehnologiju, učenicima biti na prvi pogled neshvatljivi. No pravilnom provedbom, upoznavanjem učenika s temom uz dobro vodstvo učitelja, tema može postati intrigantna. Uključivanjem učenika u praktičan rad ova tema postaje zanimljivija i vrlo se jednostavno može shvatiti, a kasnije čak i primijeniti na konkretnim primjerima. Tales je koristio samo Sunčevu svjetlost, sjenu koju radi iza pojedinih predmeta i mjerenje uz pomoć užeta. Upravo s identičnim instrumentima učenicima se vrlo lako može prikazati na koji je način on to izračunao. Bitno je da prije kretanja na praktični rad učenicima budu pojašnjeni svi pojmovi i termini koji su potrebni za izračunavanje i mjerenje. Iako je gradivo predviđeno za obradu u višim razredima osnovne škole, korištenjem konkretnih primjera koji su učenicima predočeni i objašnjeni, učenici nižih razreda su u mogućnosti isto gradivo shvatiti ako je prilagođeno njihovom uzrastu.

Svakako nastavnu temu nije moguće provesti pod redovnu nastavu za sve učenike, već kao ideja i dodatak „Za one koje žele znati više“. No, bez obzira na to smatra li se da neki učenici nisu u mogućnosti shvatiti odabranu temu, zbog lošijeg predznanja, svakako im prilika u uključivanje u ideju provedbe ovakvog sata ne bi trebala biti uskraćena.

2. Povijest

2.1. Tales iz Mileta

Tales, kojega mnogi smatraju „ocem grčke filozofije“, rođen je oko 620. g. pr. n. e. Računajući prema tada važnim Olimpijskim igrama, smatra se kako je rođen za vrijeme trideset i pete Olimpijade, od majke Kleobuline i oca Heksamije u Miletu. (Laertije, 2008) Grad Milet bio je smješten na zapadnoj obali Male Azije, točnije na istočnoj obali Egejskog mora, što je područje današnjeg sela Balat u Turskoj, u kojemu se nalaze samo ruševine drevnog grada. Promatranjem njegovog rada, Aristotel (384. g. p. n. e. – 322. g. pr. n. e.) ga opisuje kao osobu koja je prva istraživala temeljna načela podrijetla materije te ga naziva utemeljiteljem prirodne filozofije: *„Međutim, svi ne drže isto što se tiče množine i vrste toga počela, nego Tales (začetnik takve filozofije) kaže kako je to voda (zbog čega je i izjavljivao da Zemlja pluta po vodi), došavši možda do te pretpostavke jer je vidio da je hrana svemu vlažna i da sama toplina nastaje iz vlage i po njoj živi (a ono iz čega što nastaje to je i počelo svega) – dakle, od toga je izveo tu pretpostavku i zbog toga što sjemenje svih stvari ima vlažnu narav i što je vlažninama voda počelo naravi.“.* (Aristotel, 1988:10) Tales, koji postavlja pitanje što je *arché*, prapočelo svijeta, odnosno iz čega sve proizlazi i u što se vraća dolazi do odgovora kako je to *voda* istovremeno isključujući svako objašnjenje koje bi pozivao na bogove i ostala nadnaravna bića. Svojim zanimanjem za gotovo sva područja znanja, filozofije, povijesti, znanosti, matematike, inženjerstva, geografije i politike, rezultiralo je njegovom uključenošću u različitim područjima društvenog života tadašnjeg vremena. Također, u Miletu je osnovao filozofsku školu, a njegovi poznati učenici bili su Anaksimandar i Anaksimen.

Predlagao je teorije kojima je objašnjavao mnoge događaje u prirodi. Osim vode kao počelo života, nudi odgovore o podlozi Zemlje, njezinu obliku, veličini, uzrocima potresa i sl. Aristotel također navodi kako je Tales, inspiriran plutanjem drveta, zagovarao teoriju da Zemlja pluta na vodi. To je zaključio promatranjem dolazaka i odlazaka brodova u lučkom gradu Miletu. Također, pripisuje mu se i teorija da su sve stvari žive, odnosno da cijeli svijet prožima duša, što potkrepljuje primjerima električnog polja. Osim toga, promatranjem zvijezda utvrdio je ravnodnevnice i predvidio pomrčinu Mjeseca, što je kasnije nagrađeno njegovim uvrštavanjem u Sedam mudraca antičke Grčke[1], kao prvi filozof i matematičar. Također pridodaje mu se i da je „uveo“ zviježđe Malog medvjeda među grčke moreplovce, što su koristili kao bolji orijentir prilikom kretanja morem. Naime, zviježđe Malog medvjeda je bliže sjevernom nebeskom polu i pruža bolju orijentaciju. Do tada Grci su se orijentirali zviježđem Velikog medvjeda, dok su se Feničani koristili malim zvijezdama Kola, što starogrčki pjesnik i kritičar Kalimah potvrđuje citatom: *Za njega se kaže da prvi zvijezda utvrdi Kola, A njima se služe, kad plove, fenički moreplovci.* (Laertije, 2008)

Po izjavama nekih povjesničara, kao što je Plinije (63. g. – 113. g.), smatra se da Tales koristi samo empirijsko promatranje. Ta se izjava može potkrijepiti Talesovim načinom mjerenja visine Keopsove Piramide u Egiptu, koju je izračunao uz pomoć Sunčeve svjetlosti i sjene objekta. Također, to je dokaz da se Tales približavao ideji o sličnosti trokuta, što Plutarh (46. g. – 120. g.) komentira izjavom: *„...bez problema ili pomoći bilo kojeg instrumenta samo je stavio štap na kraju sjene pored piramide, što je oblikovalo dva trokuta pod utjecajem Sunčevih zraka,...dokazao je da piramida i štap imaju isti omjer kao sjena piramide sa sjenom štapa.“* Nakon takvih je shvaćanja, Tales mogao koristiti geometrijske metode za rješavanje praktičnih problema prilikom promatranja objekata u prirodi. S druge strane, neki tvrde kako je Tales geometriju stavio u područje logičnog i bio svjestan dokazivanja geometrijskih teorema. U mnogim je udžbenicima o povijesti matematike Talesu pripisano pet teorema elementarne geometrije: *1. Krug je svakim svojim promjerom podijeljen na dva dijela jednakih površina.; 2. Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.; 3. Dvije stranice istog trokuta su sukladne ako su im nasuprotni kutovi sukladni.; 4. Nasuprotni kutovi između dva pravca koji se sijeku su jednaki.; 5. Kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Iako je Talesov rad vrlo poznat i prihvaćen u području matematike, izvori i pisani dokazi njegovih matematičkih otkrića su nepoznati, zapravo, nije sigurno jesu li njegovi zapisi uopće postojali.

---

[1] Sedam mudraca antičke Grče: *Tales iz Mileta, Bijant iz Prijene, Solon iz Atene, Pitak iz Mitilene, Kleobul iz Linda, Mizon iz Hene i Hilon iz Sparte.*
(Laertije, D. (2008.) *Životi i misli istaknutnih filozofa.*)

2.2. Matematika kroz povijest

Počeci matematike mogu se nazrijeti još u doba prapovijesti, kada su ljudi tijekom dugog niza godina tražili rješenja za konkretne probleme svakodnevnog života. Borba čovjeka s prirodom najčešće je rezultirala velikim gubicima što je moglo biti pogubno za veliki broj članova čovjekove populacije. To je bio poticaj na razmišljanje i razvoj složenijih organizacija koje su bile neizbježne za opstanak. Nakon bezbroj pokušaja i pogreški čovjek je kroz vrijeme postigao zadovoljavajuća rješenja.

Od početka čovjek nije bio upoznat s pojmovima brojeva no kroz vrijeme je došao do sposobnosti konkretnog brojanja promatranjem objekata u prirodi. Uočio je da na nebu postoji samo jedan Mjesec, te je to za njega postao konkretan, jedan Mjesec. Uočavanjem objekata na svom tijelu uspoređuje po veličini skupove te ga je to potaknulo na promatranje objekata po skupovima. Uspoređivanjem skupova dolazi do uočavanja konkretnih brojeva dva, pet, deset. Tim je usporedbama mogao reći da nekih predmeta ima onoliko koliko ima Mjeseca, prstiju ili očiju, što dokazuje nedostatak apstrakcije u toj etapi čovjekova razvoja. U nekim je jezicima, kao što je stari indijski jezik, broj jedan nazvan upravo Mjesecom i Zemljom, dok je broj dva nazvan rukama, očima, blizancima i slično. Ta je spoznaja čovjeku omogućila prebrojavanje i pridruživanje jednih objekata drugim poznatim objektima, odnosno dolazi se do pojma ekvipotentnih (jednakobrojnih) skupova.

Već su u sljedećoj etapi brojevi bili imenovani što je također stepenica više u apstraktnom mišljenju. Dadić, u djelu *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, navodi kako se uspoređivanjem korijena naziva brojeva u današnjim indoeuropskim jezicima može vidjeti kako se svi nazivi brojeva u tim jezicima mogu svesti na isti korijen. Također, u prapovijesti se pojavljuje i zbrajanje. To dokazuju izrazi iz primitivnih plemena. Tako jezik iz plemena koje je nastanjeno na području Nove Gvineje i poluotoka Yorka u Australiji, ima sljedeće nazive brojeva: jedan – *urapun*, dva – *okoza*, tri – *okoza-urapun*, četiri – *okoza-okoza*, pet – *okoza-okoza-urapun* itd. Iz primjera se može utvrditi kako je broj 3 shvaćen kao zbroj brojeva 2 i 1, odnosno 5 kao zbroj 2, 2 i 1. Iz toga se kasnije moglo razviti oduzimanje, dijeljenje i množenje u okviru prirodnih brojeva.

Kod prvih civilizacija, zapisi matematičkih tvrdnji javljaju se još 2000. g. p. n. e. na različitim područjima na Zemlji. S obzirom na to da neke civilizacije nisu postojale istodobno i s razlogom što je u toj fazi razvoja međusobna povezanost bila slaba, rezultat je bolja razvijenost matematike na određenim područjima. S obzirom na to da su se na područjima Azije, od Kine do Babilona, Sredozemlja i pojedinih američkih plemena Indijanaca, znanja nadograđivala još iz prapovijesti, znanje se preklapalo i proširivalo te su na tim područjima nađeni brojni matematički sadržaji još iz tog doba. Primjerice, u Kini su pronađeni ostaci starih knjiga iz 3. tisućljeća pr. n. e., dok iz starog Egipta potječu *Moskovski papirus*[2] (oko 1850. g. pr. n. e.) i *Papirus Rhind*[3] (oko 1650. g. pr. n. e.).

To je razdoblje empirijskog, odnosno iskustvenog stjecanja znanja, koje se koristilo za probleme koje je nametao život. Znanje matematike koristilo je prilikom dijeljenja zemljišta ratnicima u Babilonu, premjeravanja zemljišta u Egiptu nakon prelijevanja Nila iz korita te plaćanja poreza vladarima. Tada se kao mjerilo koristila dužina lakta ili koraka, a stranice su zemljišta bile u obliku pravokutnika zbog lakšeg mjerenja. Poznatom se jedinicom kasnije vrlo jednostavno uvela i jedinica za površinu. Dobijali su ju tako što je jedinica površine bila kvadrat sa stranicama od jednog lakta ili koraka te bi napravili mrežu kvadratića, kojima su stranice bile jedinice dužine, te bi prebrojavanjem kvadratića vrlo jednostavno dobili površinu zemljišta. S obzirom na to da je u to doba bilo poznato množenje, jednostavno se dalo zaključiti da je površina pravokutnika jednaka umnošku brojeva kvadrata po duljini i po širini zemljišta. (Dadić, 1992) Za površine kompliciranijih likova davali su pravila za izračunavanje. Primjer pravila je Babilonska trigonometrijska tablica. (Slika 1.) Najvjerojatnije su pravila koja su na njoj zapisana koristili za izgradnju palača, hramova i ostalih građevina potrebnih za tadašnji način života.

[2] *Moskovski papirus* je otkrio je 1893. godine V. S. Golenichev, a dug je 6 m i širok 8 cm. Sadrži 25 matematičkh problema, od kojih mnogi nisu čitljivi. Čuva se u Moskovskom muzeju. (http://e.math.hr/egipat/index.html)

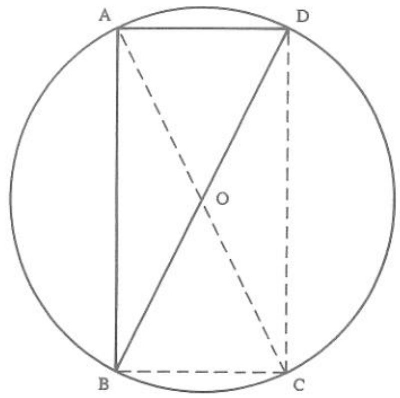
[3] *Papirus Rhind* ili *Rhindov papirus* je otkrio škotski egiptolog Henry Rhind u Luxoru, a pisao ga je pisar Ahmes oko 1650. g. pr. n. e. te je najvjerojatnije nastao prepisivanjem spisa starog 200 godina. Svitak je dug 6 m i širok 30 cm, a sadrži 87 matematičkih problema. Čuva se u British Museumu u Londonu. (http://e.math.hr/egipat/index.html)

Slika 1. Babilonske tablice s klinastim pismom; najstarija trigonometrijska tablica na svijetu, oko 1900. – 1600. god. pr. n. e.

Kasnije, mnogi su antički filozofi, uključujući Pitagoru i Talesa, upoznali pojedina matematička znanja iz starijih civilizacija. Grci su mnoge, Egipćanima i Babiloncima tada nepovezane podatke i činjenice analizirali te metodama dedukcije dolazili do novih zaključaka u skladu s novim iskustvima. Pokušali su potražiti uzročnu vezu među tada već poznatim činjenicama te se s takvim načinom prešlo na apstraktna razmatranja i dokaze.

Grci smješteni između Egejskog i Jonskog mora, oko 600 g. pr. n. e svoja naselja šire na područje Crnog i Sredozemnog mora gdje se pojavljuje veliki val u matematičkom napredovanju i razvoju. Prednost je u tome što su matematičari kao što su Tales i Pitagora imali mogućnost putovanja u središta antičkih gradova gdje su stjecali nova znanja i informacije o astronomiji i matematici. U Egiptu uče geometriju a u Babilonu Tales se najvjerojatnije susreće s astronomskim tablicama i instrumentima. (Merzbach, Boyer, 2011.)

Upoznavanjem egipatske matematike uvodi dokaz u dotadašnju empirijsku matematiku. Iako neki filozofi smatraju da se u pojedinostima Talesova rada javlja konfuzija apstraktnog i konkretnog, Talesov postupak jasan je pomak k apstraktnom u odnosu na egipatsko poimanje matematike. Značajke Talesovog dokaza mogu se primijetiti na primjeru Talesovog poučka koji izriče da je obodni kut nad promjerom kružnice pravi. (Slika 2.)



Slika 2. Dokaz Talesovog poučka

Dadić navodi kako je za dokazivanje Tales koristio sljedeću tvrdnju: četverokut, kojemu su dijagonale međusobno jednake duljine i raspolavljaju se, je pravokutnik. Ako se ocrta kružnica sa središtem u O, povuku dva promjera, AOC i BOD i spoje točke na kružnici AB, BC, CD i AD dobije se četverokut ABCD. S obzirom na to da se jednaki promjeri AC i BD raspolavljaju u točki O, to je prema navedenoj tvrdnji četverokut ABCD, pravokutnik. Sva su četiri kuta tog pravokutnika jednaka i prava. Ako se ispuste točkaste dužine AC, BC i CD istaknuti je obodni kut BAD pravi jer je to kut pravokutnika, što znači da je obodni kut BAD nad promjerom BD kružnice pravi. S obzirom na to da to vrijedi za svaku točku A, to znači da će svaki obodni kut nad promjerom kružnice biti pravi. Prva tvrdnja o pravokutniku nema dokaz već se oslanja na očitost osjeta. Bez obzira na nepotpunost, to je bio prvi pokušaj dokazivanja jedne matematičke tvrdnje drugom.

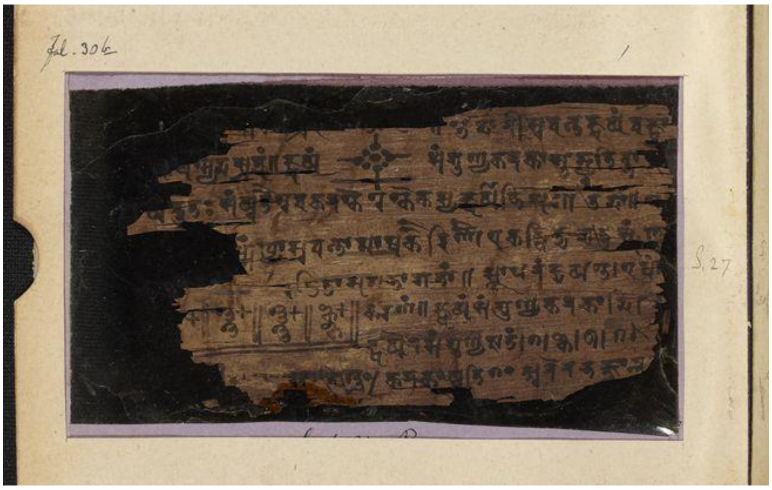
Kraj starogrčke matematike, te početak srednjeg vijeka za povijest znanosti bilježi se kao razdoblje nakon posljednjih matematičara Papusa i Diofanta koji su djelovali u 3. st. pr. n. e. na području Aleksandrije. U 4. i 5. st. pr. n. e. Aleksandrija doživljava procvat nepotizma[4] koji ima važnu ulogu u razvoju matematike. Ovo je razdoblje obilježio veliki utjecaj kršćanstva na srednjovjekovnu matematiku, za što se zalaže Ivan Filipon (490. g. – 570. g.), koji povezuje Aristotelova učenja u platonističkoj interpretaciji s kršćanstvom. Na području Europe, točnije na prostoru današnje Italije, u 6. je stoljeću djelovao Severin Boetije (480 – 524. g) koji je

[4] Nepotizam (lat. *nepotis – unuk, potomak, nećak*) – težnja svjetovnih i duhovnih moćnika da povlašćuju rođake i miljenike i priskrbljuju im časti i službe. (http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=43427)

zagovornik sustava *sedam slobodnih umijeća*[5], a oslanja se na starogrčke autore. Tako je odsječak o aritmetici napisao na temelju Nikomahove aritmetike te je odsječak za znanje ranog srednjeg vijeka na puno nižoj razini od starogrčke matematike, no takvim je kontinuitetom pridonijelo procvatu matematike kasnije, u 11. i 12. stoljeću.

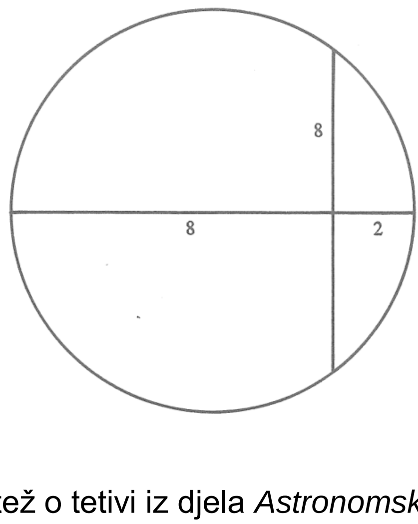
Za razliku od grčke, indijska je matematika zadržala iskustveni karakter koji je u praksi imao vrlo značajnu ulogu te su se u tom smjeru razvijale važne matematičke procedure. Uz to je na tom području matematika bila vrlo blisko povezana s astronomijom, što je rezultiralo astronomskim tekstovima često popraćenim matematičkim izlaganjima. Najstariji poznati matematički rukopis je *Bakhshali rukopis*iz 4. stoljeća. (Slika 3.) Takvi su tekstovi važni izvori u kojima se upoznaje indijska matematika. Povezanost matematike s iskustvom, potaknula je Indijce za razvitkom interesa prema aritmetičkim aspektima matematike. Samo ime za matematiku, *ganita,* na indijskom znači znanost o računanju. Radili su s razlomcima, negativnim brojevima te također koristili nulu. Matematičar Brahmagupta (598. g. – 670. g.) napisao je tekst pod nazivom *Astronomski sustav Brahme*u kojemu daje pravila za računske operacije, npr.: *Umnožak dvaju negativnih brojeva je pozitivan.; Umnožak nule i negativnog broja ili nule, kao i pozitivnog broja, jest nula.* i sl. Kasnije, matematičar Bhaskara (1114. g. – 1185. g.) nadopunjuje rad *Brahmagupte* i naslućuje kako bi rezultat diobe s nulom trebao biti beskonačan, za što navodi: *„Količina koja proističe iz diobe s nulom nepromjenljiva je bez obzira na to što joj se doda ili od nje oduzme, jednako onako kako je trajan Bog, koji je beskonačan i nepromjenljiv.“.* Također, Indijci su u sklopu svog shvaćanja unaprijedili i algebru. Kod kratica, kao i Diofant u Grčkoj, koriste prva dva slova riječi. Isto koriste i kod nepoznanice, koja je označena s prva dva slova, *ja* (*javat-javat*, koliko-koliko). Kod više nepoznanica koriste prva dva slova riječi koje označavaju boje: *ka* (*kalaka*, crna), *ni* (*nilaka*, plava) itd., a kod potencija kvadrat se označava s*va* (*varga*), treća potencija *gha* (*ghana*) te četvrta *va va.*(Dadić, 1992)

[5]Sedam slobodnih umijeća (lat. *septem artes liberalis*) – sedam disciplina koje su u srednjem vijeku držali temeljem svih znanosti: gramatika, retorika, dijelektika, aritmetika, geometrija, glazba i astronomija.
(http://enciklopedija.lzmk.hr/clanak.aspx?id=35952)



Slika 3. Bakshali rukopis iz 4. stoljeća

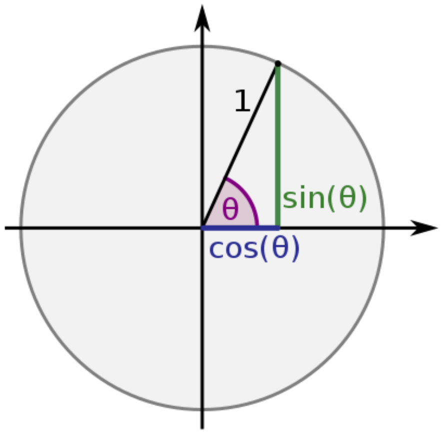
Dadić također navodi kako je određivanje tetive u Indiji, za razliku od Grčke, bilo brojčano. Tako je u *Astronomskom sustavu Brahme*, *Brahmagupta* zapisao: *„U kružnici, tetiva je drugi korijen od četverostruke strijele*[6] *i promjera umanjenoga za strijelu."* Navodi primjer: *„U krugu, ako je promjer 10 na mjestu gdje je strijela 2, kolika je tetiva? Promjer 10, oduzme se strijela 2 i ostaje 8. To se pomnoži sa strijelom i dobije se 16, što pomnoženo s 4 daje 64, a drugi korijen od toga je 8.*". (Slika 4.) U suvremenoj bi interpretaciji to zapisali $\frac{t}{2} = \sqrt{(2r-v)v}$ ili t $=\sqrt{4(2r-v)v}$ u kojoj je *2r* promjer, *v* strijela i *t* tetiva.



Slika 4. Crtež o tetivi iz djela *Astronomski sustav Brahme*

[6] Strijela – dio promjera, okomitoga na tetivu, od tetive do kružnice.

Osim toga, Indijci su promatrali i polutetivu, koju pojašnjava *Ariabhate* (476. g. – 550. g.), indijski astronom i matematičar. Izračunavajući polutetive, dijelove promjera do presjeka s tetivom, dobili su vrijednosti za sinus, kosinus i sinus versus[7]. (Slika 5.)



Slika 5. Funkcija sinusa i kosinusa

Nakon osvajanja istočnih područja u Aziji, sjevernoj Africi i zapadnih dijelova Europe, Arapi su upoznali istočnjačku matematiku, kako indijsku, tako i starogrčku. Prihvaćanjem najpozitivnijih stavki iz obje matematike, stvorili su novu cjelinu koja je davala nove poticaje razvitku znanosti. Preuzeli su indijski način promatranja polutetive i izračunavanja sinusa i kosinusa u brojčanom smislu, te njihov brojevni sustav, dok su od Grka preuzeli strogi geometrijski dokaz i Diofantovo izbjegavanje negativnih brojeva. Dadić navodi, kako su Arapi kvadratne jednadžbe rješavali na vrlo općenit način te da su uveli općenite procedure rješavanja jednadžbi koje se očituju u postupcima manipulacije članovima (*al-džabr*) i proturješenja (*al-mukabala*). Linearne i kvadratne jednadžbe podijeljene su u 6 tipova:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $bx = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

Posljednje tri jednadžbe različite su upravo stoga što članovi nisu negativni.

[7] Sinus versus = 1 - cos

Postupak *al-džabra*, od kojeg potječe naziv *algebra*, je prijenos negativnih članova jednadžbi na drugu stranu u obliku pozitivnih članova, s obzirom na to da se negativni članovi izbjegavaju. Proturješenje, odnosno *al-mukabala* je kraćenje jednakih članova na obje strane. Dadić navodi primjer jednadžbe u kojoj pojašnjava oba postupka: $x^2 + 17 = 56 - 10x$, koju postupkom al-džabra svodi na $x^2 + 17 + 10x = 56$, te pomoću al-mukabala na $x^2 + 10x = 39$.[8]

Arapi stvaraju utjecaj na zapadnoeuropsko matematičko mišljenje direktnim kontaktima tih kultura u 11. i 12. stoljeću što se očitovalo prevođenjem arapskih znanstvenih djela na latinski jezik. Taj je međusobni utjecaj bio značajan za daljnji razvitak matematike i fizike. Po boravku u Alžiru, tadašnjem kalifatu Almohada, i drugim arapskim zemljama u kojima se upoznao, kako s arapskom tako i s indijskom matematikom, talijanski matematičar Leonardo Fibonacci (oko 1170. g. – poslije 1240. g.) piše djelo *Liber abaci* u 1202. godini. Koristio se retoričkim načinom izlaganja kojeg su koristili Arapi. U njemu se zadani broj nazivao *numerus* ili *denarius*, što je bio novac, dok se nepoznati nazivao *res*, što znači stvar. Dadić dodaje primjer iz Leonardova djela iz kojeg se očituje konkretnost i upotrebljavanje denariusa i stvari: *„...Na taj način, stvar i 12 denariusa je sedam veće od 5 stvari bez denariusa. Odavde se 34 stvari sastoje od 96 denariusa, a jedna stvar je 2* $\frac{14}{17}$.*“* Pretvaranjem ovog teksta u simbolički oblik izražavanja, dobijemo sljedeće: $(x + 12) = 7\,(5x - 12)$, što je $34x = 96$, odnosno $x = 2\frac{14}{17}$. Osim na Fibonaccia, velik je bio utjecaj arapske matematike i na Jordanusa de Nemorea (1225. g. – 1237. g.) i njegova dva velika djela, *Arithmetica* i *De numeris datis*. On u svojoj aritmetici slijedi arapske izvore kao i veliki broj autora toga doba. U tekstu *Secretum philosophorum*, nepoznatog autora, nastalom u Engleskoj u 14. stoljeću koristi se aproksimativna vrijednost za broj π, približnom vrijednošću $\frac{22}{7}$. Osim toga, u djelu se izračunava

---

[8] Rješenje jednadžbe $x^2 + 10x = 39$ formulom $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm\sqrt{10^2-4\cdot1\cdot39}}{2\cdot1}$

$x_{1,2} =\frac{-10 \pm\sqrt{100-256}}{2}$

$x_{1,2} =\frac{-10 \pm\sqrt{-156}}{2}$

$x_{1,2} =\frac{-10 \pm 16}{2}$

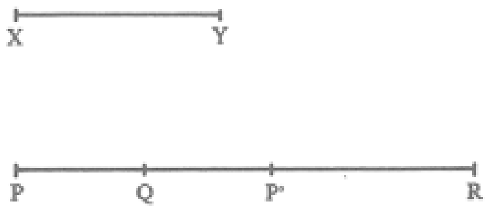
$x_1=\frac{-10+ 16}{2} = 3$

$x_2=\frac{-10- 16}{2} = -13$

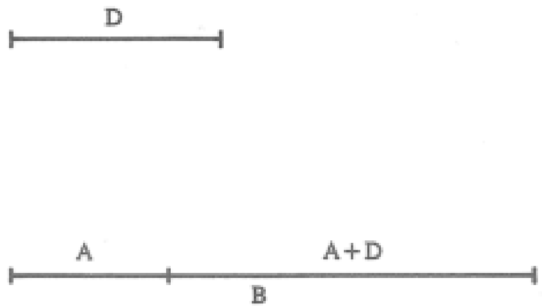
površina trokuta kao umnožak poluosnovice i visine, zatim površina kruga, obujam kugle i obujam drugih tijela.

U 16. stoljeću dolazi do dopunjavanja tadašnje matematike novim poučcima, rješenjima i problemima. Korištenje kratica već je tada bilo uobičajeno, te su se korištenjem one usavršavale. Tako se, u to vrijeme, za riječ plus, odnosno operaciju zbrajanja, koristi kratica *p* ili *p̃*, za riječ minus, odnosno operaciju oduzimanja, kratica *m* te za riječ *radix* (korijen) koristila se kratica *R*. Dadić navodi, kako se u jednom od radova Rafaela Bombellija (1526. g. – 1572. g.) javlja nekoliko primjera matematičkih izraza: *2 via 3 fa 6*, što bismo danas izrazili kao 2 *puta 3 je 6* ili *R.c* [.71*p.R.q.*1088] što bismo izrazili kao $\sqrt[3]{71+\sqrt{1088}}$, prilikom čega možemo iščitati da su *R.c.* početna slova za riječi *radix cuba* (treći korijen) te *R.q.* za riječi *radix quadrata* (drugi korijen). Postupno su se ti izrazi mijenjali sa znakovima. Tako 1544. godine Michael Stifel (1487. g. – 1567. g.), u djelu *Arithmetica integra,* prvi u matematičku literaturu uvodi znak + za zbrajanje i znak - za oduzimanje. Robert Recorde (1512. g. – 1558. g.) 1557. godine prvi put upotrebljava znak jednakosti, „ = “, te u istom stoljeću Christoph Rudolff (1499. g. – 1545. g.) uvodi znak „ ᵛ “ za drugi, odnosno znak „ ᵛᵛᵛ“ za treći korijen.

Prema uzoru na Jordanusa de Nemorea, koji je prvi upotrijebio oznaku slova za prikazivanje bilo kojeg broja, François Viète (1540. g. – 1603. g.) opći je broj proširio i na geometrijske objekte. Promatrane su veličine nazvane *species* koje su opće veličine i mogu se primijeniti kako na brojeve tako i na geometrijske objekte. Za razliku od starogrčke matematike u kojoj je algebra bila geometrijska te od arapske koja je bila numerička, algebra koja radi sa *„species“* je čista, opća algebra. Također, Viète ističe da numerički račun, *logistice numerosa*, operira s brojevima, a računanje sa species, *logistice speciosa*, operira kako s brojevima tako s geometrijskim objektima. Nakon predočavanja tih objekata u algebarskom obliku, između njih se postavljaju algebarske veze, umjesto geometrijskih, odnosno dobiju se jednadžbe sa zadanim i traženim veličinama. Te se jednadžbe transformiraju do konačnog oblika iz kojeg se zaključuje kakva istina vrijedi za dane i tražene veličine. Iz te se istine, *porizme*, određuje tražena, mjerljiva veličina. Ako se ta jednadžba rješava numeričkim ili algebarskim postupkom, onda je tražena veličina broj. Postupak može voditi do geometrijskih veličina koje su neposredno vidljive. Za bolje pojašnjavanje opisanog geometrijskog postupka, Dadić dodaje sljedeći primjer: *Postavljen je* *geometrijski problem u kojemu zadanu dužinu PR treba presjeći tako da veći dio premašuje manji za zadanu dužinu XY.* (Slika 6.) Prikazano je već ono što se traži, odnosno dužina PR koja je u točki Q podijeljena onako kako se dužinu želi podijeliti, dakle veći dio QR premašuje manji dio PQ za dužinu XY. Manja dužina prenesena je na veću QR kao dužina QP', a ostatak je jednak zadanoj dužini XY. Završetkom analize može se zaključiti da se prvo treba na dužinu PR prenijeti razliku XY (na dužini PR to je P'R) te ostatak podijeliti na dva jednaka dijela u točki Q. U sklopu Vièteove algebre zadatak bi se riješio korištenjem općih veličina, odnosno speciesima. Cijela dužina neka je označena s B, a dužina kojom veći dio premašuje manje, D. Manji dio neka je A, onda veći mora biti A + D, odnosno cijela je dužina tada 2A + D. Iz toga se postavlja jednadžba: B = 2A + D ili B – D = 2A. (Slika 7.) Kada bismo sintezu izvodili računski, tada bi se za zadane vrijednosti iz jednadžbe trebalo staviti numeričke vrijednosti te jednadžbom odrediti nepoznatu veličinu A. No, ako sintezu provodimo geometrijski, tada se konstrukcija provodi tako da je stalno u skladu s porizmom. Odnosno, od zadane dužine PR se oduzima P'R, koju raspolavljamo na dva jednaka, manja dijela.



Slika 6. Ilustracija postupka geometrijske analiza



Slika 7. Vieteova algebarska analiza

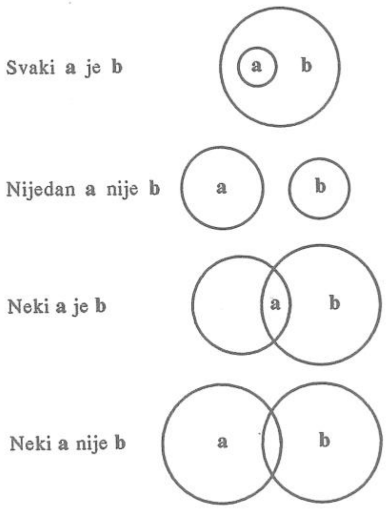
Planimetrijski i stereometrijski dokazi i izvodi iz Euklidovih *Elemenata*, koji su često bili geometrijski, postupno se sve više algebriziraju. Ovakva promjena u shvaćanjima bila je prekretnica u matematičkim shvaćanjima u cjelini, s obzirom na to da su se svi geometrijski poučci mogli prikazati algebarski. Vièteova algebra omogućila je reinterpretaciju dotadašnjih matematičkih rezultata i bila je preduvjet pojave novih matematičkih područja u 17. stoljeću.

Jedan od najtipičnijih matematičara koji su početkom 17. stoljeća primjenjivali i geometrijsku i algebarsku matematiku bio je Marin Getaldić (1568. g. – 1626. g.). U svom djelu *Variorum problematum collecto* iz 1607. godine zadatke većinom rješava konstruktivno, no za neke je zadatke koristio i geometrijsku analizu. Godine 1630. u djelu *De resolutione et compositione mathematica* najveću pozornost posvećuje algebarskoj analizi. Ističe četiri tipa problema: *1. problemi koji se rješavaju u brojevima i ne zahtijevaju konstrukciju, 2. nemogući problemi, koji se uočavaju analizom porizma, 3. neodređeni problemi* i *4. problemi koji ne spadaju pod algebru.* (Dadić, 1992) Prilikom rješavanja problema Getaldić je naglasio svu snagu algebarske analize. Tako je tek nakon provedene analize moguće vidjeti nemogućnost rješenja u drugoj skupini, odnosno analizom problema četvrte skupine se dolazi do zaključka da se ne svode na algebru, već na jednadžbe koje sadrže primjerice trigonometrijske izraze (primjerice *sinus*, *kosinus*, *tangens* i *kotangens*). No, najvažnija je skupina problema onih neodređenih, s obzirom na to da se iz njih mogu izvesti dalekosežni zaključci, odnosno ima beskonačno mnogo načina rješavanja, no ipak ne bilo kakvog načina rješavanja. Za pojašnjenje Dadić navodi primjer: *Zadana je osnovica trokuta, a razlika njegovih krakova jednaka je polovici osnovice. Treba konstruirati trokut.* Getaldić zaključuje kako postoji beskonačno mnogo rješenja te provodi konstrukciju: *Neka se raspolovi zadana osnovica AB u C i uzme AD > AC, a ostatak DB raspolovi u E i podigne u E okomica EG. Podvostruči se AD do F i raspolovi CF u H. Iz središta A opiše se polumjerom AH luk koji siječe EG u G, spoji G s A i B, pa je dobiven traženi trokut.* Problem je u tome što vrh G nije jednoznačno određen, već ovisi o izboru točke D. No, bez obzira na točku D, uz uvjet da je AD > AC, trokut zadovoljava uvjetima zadatka. Dadić navodi kako Getaldić opaža da svakoj točki D pripada jedna točka G, tj. da svakoj dužini AD pripada jedna dužina EG, za koje će problem biti rješiv. Time je došao do zaključka da postoji funkcijska veza između dviju točaka, odnosno dužina. Iako Getaldić nije uspio otkriti na koji način će se riješiti taj problem, nekoliko godina kasnije, René Descartes

(1596. g. – 1650. g.) uspijeva, iako iz drugog neodređenog geometrijskog problema, koji je potaknuo otkriće novog područja matematike, analitičke geometrije. Neodređene probleme i nove korake u njihovom rješavanju pojašnjava u djelu *Le géométrie*, koje je objavljeno 1637. godine.

Descartesovim uvođenjem koordinata uspostavljena je funkcijska veza između dvije promjenjive veličine (varijable). Iako se pojam funkcijske veze razvijao polako, James Gregory (1638. g. – 1675. g.) mu se 1667. godine približio uvođenjem pojma sastavljanja nove veličine iz zadanih veličina zbrajanjem, množenjem, dijeljenjem ili vađenjem korijena, u djelu *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Sam pojam funkcije prvi put upotrebljava Gottfried Wilhelm Lebniz (1646. g. – 1716. g.) u djelu *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* iz 1673. godine prilikom razmatranja veze apscise i ordinate koja je dana algebarskom ili transcendentnom jednadžbom.

U 17. stoljeću, nakon nekoliko stoljeća mirovanja u tom području, Leibniz pokušava prikazati logičke relacije matematički. Taj je događaj označio novu interpretaciju logike i početak novih mogućnosti u matematici. U djelu *De arte combinatoria* raspravlja o aritmetici logike u kojoj uvodi klasu primitivnih pojmova koji su pridruženi prirodnim brojevima, a bilo ih je 27. Od tih 27, Dadić navodi sljedeće: 1. točka, 2. prostor, 3. interval, 4. kontinuitet, 5. udaljen, 9. dio, 10. cjelina te 14. broj. Brojeve koji nisu bili primitivni prikazao je razlomcima. Kasnije je svoju matematičku interpretaciju logike unaprijedio u svojim sljedećim tekstovima koji su nastali 1685. godine. U tim je djelima pridružio primitivne pojmove s prim-brojevima, a kombinacije primitivnih brojeva predočio je umnoškom pridruženih brojeva. Primjerice, ako je pojam *razuman* predočen brojem 3, a pojam *životinja* brojem 7, pojam *čovjek* bit će predočen brojem 21. Dakle, analiza pojma *čovjek* tumači se dekompozicijom broja 21 na proste faktore, odnosno na 3 i 7. Također, ponavljanje prim-brojeva po njegovom mišljenju nebi imalo smisla jer bismo inače imali *razumnu razumnu životinju*. Kako bi ovakve situacije izbjegnuo, uvodi operaciju koju nazivamo *idempotentnost*, odnosno ako je jedan pojam predočen brojem x, onda je $xx=x$. Njegove je rezultate, 1761. godine u tekstu *Letters à une Princesse d' Allemagne,* Leonard Euler (1707. g. – 1783. g.) prikazao geometrijski. (Slika 8.)



Slika 8. Eulerove analogije logičkih relacija

Immanuel Kant (1724. g. – 1804. g.) djelom *Opća povijest prirode i teorija neba (Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels)*, u drugoj polovici 18. stoljeća, prikazuje svoje shvaćanje strukture svijeta i izlaže teoriju postanka svemira na temelju Laplaceovoe matematičke razrade. Kasnije, u djelu *Kritika čistog uma* (*Kritik de reinen Vernunft)* iz 1781. godine, iznosi filozofiju u kojoj se spominje važnost analitičkih i sintetičkih sudova te apriornih i aposteriornih odnosno empirijskih sudova. Analitički je sud, navodi Dadić, primjerice „*Visoki čovjek je čovjek.*“, jasan sam po sebi s obzirom na to da je u sadržaju „*Visoki čovjek je čovjek*“ sadržan pojam „*čovjek*“, zapravo analitički sudovi ne daju nove spoznaje već samo objašnjavaju. S druge strane, za sintetički sud je bitna iskustvena informacija. Primjerice, sintetički sud „*Učenik N.N. je bolestan*.“ se ne može potvrditi ako se činjenica ne dozna iz iskustva. On otkriva novu vezu među pojmovima koji inače nisu povezani i donosi novu spoznaju te uz najmanje dva odvojena pojma treba biti nešto što omogućuje povezivanje tih pojmova, a to je treća stvar ili *tertium quid*. Kant, također, radi razliku među sudovima te razlikuje apriorne i empirijske sudove. Empirijski sud se može donijeti isključivo preko osjetnog zora, dok apriorni za svoju valjanost ne zahtijeva empirijsku potvrdu. Promatrajući razlike između analitičkih i sintetičkih te apriornih i empirijskih sudova, one nisu uvijek precizne i oštre već se često javljaju granični slučajevi koji ne pripadaju niti jednoj kategoriji sudova. No, u geometriji i aritmetici sintetički apriorni sudovi imaju veliku važnost, odnosno, po Kantu, geometrijski postulati i aksiomi su sintetički empirijski sudovi. Dadić navodi postulat „*Pravac je najkraća crta između dvije točke*“ koji je isključivo sintetički s obzirom na to da se analizom pojam „*najkraći*“ ne može naći u pojmu pravca te se u obzir uzima jedino opažanje.

Kantova filozofija se odrazila i na istraživanja matematičke logike. Zaključuje da je čista logika apriorna i može se primijeniti na konkretne potrebe. Iz tog razloga nebi bilo potrebno istraživati formalnu logiku koju je izložio Aristotel, te su Kantovi filozofi smatrali da nije potrebno obrađivati logiku matematički. Tim je razmišljanjima Kantova filozofija uvjetovala stagnaciju u istraživanju matematičke logike u 18. stoljeću.

Na području algebarske geometrije Karl Friedrich Gauss (1777. g. – 1855. g.) dolazi do novih zaključaka i dokaza. U disertaciji 1799. godine dokazuje kako svaka polinomska jednadžba $f(x) = 0$ ima barem jedan korijen, bez obzira jesu li koeficijenti realni ili kompleksni. Dadić to prikazuje na primjeru jednadžbe: $z^2 - 4i = 0$ u kojoj je imaginarna jedinica $i = \sqrt{-1}$. Ako je rješenje jednadžbe $z = a + bi$, tada mora biti:

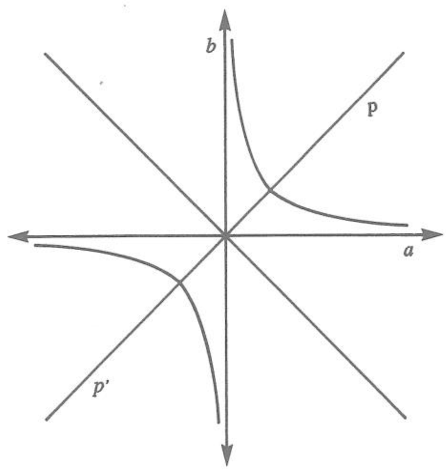
$$(a + bi)^2 = 4i$$

odnosno $(a^2 - b^2) + (ab - 2) \cdot 2i = 0$

iz čega je $a^2 - b^2 = 0$

$$ab - 2 = 0$$

Iz prve jednadžbe se iščitava da ako se a i b uzmu kao varijable, krivulja koju predočava ta jednadžba se raspada na dva pravca, i to simetrale prvog i drugog kvadranta, a druga jednadžba predočuje hiperbolu. Također pokazuje da mora postojati sjecište simetrale prvog i trećeg kvadranta s granama hiperbole. Koordinate sjecišta p i p' su a i b, što je realni dio i koeficijent imaginarnog dijela kompleksnog broja koji je rješenje jednadžbe $z^2 - 4i = 0$. (Slika 9.)



Slika 9. Gaussovo rješenje jednadžbe $z^2 - 4i = 0$

Godine 1826. na temelju izmjene petog Euklidovog postulata ruski matematičar Nikolaj Lobačevskij (1793. g. – 1856. g.) izrađuje novu geometriju. Svoje rezultate objavljuje u raspravi pod naslovom *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* 1840. godine na njemačkom jeziku. Dadić navodi kako Lobačevskij rasuđuje na sljedeći način: *„Uzmimo pravac p i točku A izvan njega. Tom točkom povucimo nekoliko pravaca. Što je veći kut koji pravac kroz A zatvara s okomicom, to će biti dalje sjecište s pravcem p. Neka postoji jedan granični pravac* p_1 *s desne strane i* p_2 *s lijeve strane, koje ćemo nazvati usporednicama ili paralelama sa zadanim pravcem p."* Na temelju toga, a umjesto Euklidovog petog postulata, dobiva se neproturječna geometrija. Iz ove pretpostavke još proistječe da je zbroj kutova u trokutu uvijek manji od dva prava kuta, da trokuti koji nemaju jednake površine ne mogu biti slični, da je količnik opsega kruga i njegova polumjera veći od π i da je količnik veći što je veća površina kruga. Ove i druge posljedice protivne su Euklidovoj geometriji.

Nakon Kanta, potkraj 19. stoljeća provode se bitna istraživanja u području matematičke logike. Novi pristup u tom području objavljuje George Boole (1815. g. – 1864. g.) u djelu *The mathematical analysis of logic* 1847. godine. Zamislio je da se univerzum svih pojmova označuje s 1 te se pojedini članovi u tom univerzumu grupiraju u klase iste kvalitete. Također, isti individualni član može biti u više klasa jer može imati više različitih kvaliteta. Primjerice, članovi jedne klase mogu biti označeni s *Y*, s *X* druge klase itd. S x možemo označiti operaciju izbora iz bilo kojeg subjekta koji sadrži pojedine članove te se može pretpostaviti da on odabire iz tog subjekta članove X koje sadrži. Tako će se s *y* označiti operacija izbora nekog drugog subjekta iz kojeg odabire sve pojedine članove *Y*. Dadić navodi kako Boole daje tri aksioma koje naziva zakonima temelju kojih provodi druge poučke svoje matematičke logike te ih navodi:

1. zakon: Rezultat izbora ne ovisi o grupiranju, odnosno svejedno je ako iz grupe objekata koja je zamišljena kao cjelina odaberemo klasu x ili ako grupu podijelimo na dva dijela te izaberemo članove X iz njih posebno, te rezultate spojimo u jednu klasu. Taj se zakon može predočiti sljedećom matematičkom jednadžbom: $x (u + v) = xu + xv$, u kojoj je nepodijeljeni subjekt $u + v$, a u i v njegove komponente. Suvremenim oznakama, ova bi se relacija mogla predočiti na sljedeći način: $x \cap (u \cup v) = (x \cap u) \cup (x \cap v)$ te izražava distributivnost operatora $\cap$ prema $\cup$.

2. zakon: Isto je kojim se redom izvršavaju sukcesivni činovi izbora. Primjerice, navodi Dadić, ako iz klase životinja odaberemo *ovcu*, a između njih one koje su *rogate*, odnosno ako iz klase odaberemo *rogate životinje*, pa od njih one koje su *ovce*, rezultat će ostati nepromijenjen, tj, u svakom slučaju dobijemo klasu *rogatih ovaca*. Taj se zakon može predočiti sljedećom jednadžbom: $xy = yx$, koja se suvremenom simbolikom može zapisati kao $x \cap y = y \cap x$, a izražava komutativnost operatora $\cap$.

3. zakon: Rezultat zadanog akta izbora izvršenog dvaput ili bilo koji broj puta jedan za drugim isti je kao da je akt izvršen jedanput. Odnosno, ako iz grupe objekata odaberemo članove *X*, dobijemo klasu čiji su svi članovi *X*. Ponovi li se operacija na tu klasu, ne dolazi do promjene. Tada dobijamo jednadžbu: $x \cdot x = x$ ili $x^2 = x$, a ako se operacija ponavlja *n* puta, onda to zapisujemo kao $x^n = x$, što je prije spomenuta Leibnizova idempotentnost.

Tako je u Boolovoj logici prvi put izražena važnost forme, a ne sadržaja. On upotrebljava slova *x, y, z*... kako bi predočio objekte podskupa stvari (brojevi, točke, ideje i sl.) koje su odabrane iz univerzalnog skupa onog o čemu se raspravlja. Svaki predmet predočen na takav način, koji se sastoji od simbolike i preciznih pravila operacija s tim simbolima, dok se traži samo uvjet unutrašnje konzistencije, predmet je matematike. Na takav je način matematički skup shvaćen u širokom smislu te su shvaćanja bila dalekosežna u poimanju formalizma koji se proširio na mnogo veći broj objekata nego do tada.

Gottlob Frege u djelu *Die Grundlagen der Arithmetik* iz 1884. g. postavlja formalni sustav aritmetike u kojem je prvi dao definiciju prirodnih brojeva. Nakon njega, u djelu *Arithmetices principia, nova methodo exposita* objavljenom 1889. g, Giuseppe Peano stvara teoriju aritmetike koja se izvodi iz određenog broja aritmetičkih pretpostavki u skladu s logičkim načelima. Njegovi aksiomi glase: *1.) 1 je prirodan broj.; 2.) Sljedbenik svakog prirodnog broja jest prirodni broj.; 3.) Nijedna dva prirodna broja nemaju istog sljedbenika.; 4.) 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.; 5.) Svako svojstvo koje pripada prirodnom broju 1 i sljedbeniku svakog prirodnog broja koji ima to svojstvo pripada svim prirodnim brojevima*. Iz tih se aksioma izgrađuje formalna aritmetika u kojoj se postavlja zahtjev da cijeli aritmetički sustav bude logički konzistentan, nije potrebno da niti jedan pojam koji se upotrebljava, niti bilo koja temeljna ili izvedena tvrdnja, budu intuitivno potvrđeni.

Približavanjem kraja 19 stoljeća, dolazilo je do sve većeg razilaženja matematičara tradicionalista i matematičara formalista. No, bez obzira na međusobna nijekanja i podcjenjivanja, ta su se istraživanja mogla dovesti u sklad.

Početkom 20. stoljeća Jules Henri Poincaré (1854. g. – 1912. g.) daje novu interpretaciju geometrije, odnosno interpretaciju geometrije Lobačevskog u Euklidovoj ravnini. Dokazao je neproturječnost jedne teorije drugom. Također, iako je zastupao formalnu metodu, udaljio se od nje. Zalaže se za to da se sustav aksioma postavlja dogovorom. Iz tih se aksioma matematička teorija mora izvoditi strogo deduktivno, istovremeno odustajući od analogije s vanjskim objektima koji mogu biti uzori elemenata same teorije. Nazivi elemenata koji se koriste preuzeti su iz govornog jezika, a ne smiju nas potaknuti na asocijacije već ih treba uzeti uvjetno. Nakon toga elemente te teorije treba interpretirati konvencionalno. Takvo se Poincaréovo shvaćanje naziva *konvencionalizam*.

Osim geometrija, razvija se nova ideja matematike kao grane logike. Za to se zalažu Bertrand Russel (1872. g. – 1970. g.) i Alfred North Whitehead (1861. g. – 1947. g.) koji novi pravac, *logicizam*, razvijaju u djelu *Principia Mathematica* objavljenom u tri sveska, 1910. – 1913. godine. Zalažu se za to da se svi matematički pojmovi mogu odrediti terminima čiste logike, a dokazi svih matematičkih tvrdnji logičkim sredstvima.

Godine 1900. Hilbert postavlja 23 problema na koja matematičari moraju odgovoriti u bliskoj budućnosti. Ti su problemi potaknuli istraživanja austrijskog matematičara Kurta Gödela (1906. g. – 1978. g.) koji je dokaze objavio 1931. godine. Dokazao je da već i elementarna matematika sadrži tvrdnje koje se ne mogu ni dokazati ni opovrgnuti zato što se ne može postaviti skup aksioma koji bi bio dovoljan da se dokažu sve istinite tvrdnje aritmetike. Također dokazao je da svaki neproturječni sustav sadrži tvrdnju koja se u njemu ne može dokazati te je taj rezultat nazvan prvim Gödelovim teoremom nepotpunosti. Drugi Gödelov teorem glasi: *Neki sustav, ako jest neproturječan, nužno je takav da se ta neproturječnost unutar istoga sustava ne može dokazati.* Ti su teoremi bili velike posljedice s obzirom na to da je njima bila dokazana nemogućnost potpune formalizacije matematike.

Novi pravac, razvijan tijekom prve polovice 20. stoljeća, poveo je nizozemski matematičar Luitzen Egbertus Brouwer (1881. g. – 1966.g.) pod imenom *intuicionizam*. Intuicionisti su odnos matematike i logike obrnuli, odnosno za njih matematike ne može biti grana logike već logika potječe iz matematike. Iz njihove se perspektive uzima da neka pretpostavka ne mora biti sigurna ako protivna pretpostavka dovodi do apsurda. To znači da nije ispravno zaključivanje po načelu isključivanja trećeg, *tertum non datur,* što vodi u nemogućnost aktualne beskonačnosti te ponovno uvodi zastupanje potencijalne beskonačnosti.

U toj se matematici ponovno prihvaća pojam potencijalne beskonačnosti, što je bilo obnavljanje dotadašnjeg shvaćanja beskonačnosti koje je zastupao još i Aristotel. Iako takva matematika nije do danas općenitije prihvaćena, ne znači da budućnosti nije moguće ponovno buđenje interesa za gradnju matematike na takvim temeljima.

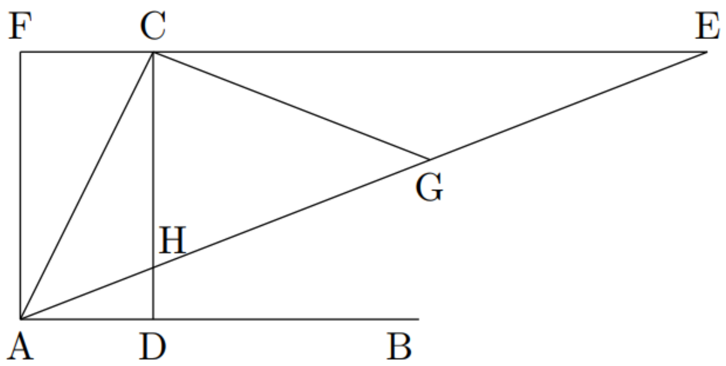
2.3. Razdvajanje aritmetike i geometrije

Stari su Grci za konstruiranje isključivo koristili ravnalo, koje je služilo za spajanje dviju točaka i šestar koji se koristio za crtanje kružnica s unaprijed poznatim središtem i polumjerom. Takav je pristup doveo do mnogih matematičkih problema, od kojih su najveći, odnosno najpoznatiji: *duplikacija kocke*, *trisekcija kuta i kvadratura kruga*. Kod duplikacije kocke tražila se stranica kocke koja ima obujam dvostruk zadanoj kocki, kod trisekcije kuta se tražila podjela kuta na tri jednaka dijela dok se kod kvadrature kruga tražilo da se krug preslika u kvadrat jednake površine. Korištenjem samo elementarnih konstrukcija i sadržavanjem skrivene iracionalnosti u problemima, sva su tri problema bila prevelik izazov svim matematičarima.

Problem duplikacije kocke, konstruiranje kocke čiji je volumen dvostruko veći od volumena zadane kocke, često se još i naziva *Delijski problem*. Naziv dolazi od legende o kugi koja je harala u Ateni oko 430. g. pr. n. e. Atenjani su pomoć potražili u Delfijskom proročištu u Delosu u kojemu su dobili odgovor da će samo ako uspiju udvostručiti oltar Apolonu, koji je bio u obliku kocke, pobijediti kugu. Naravno, udvostručivanjem svake pojedine stranice Atenjani bi dobili oltar 8 pula veće zapremine od polaznog. Kasnije se kroz povijest dokazalo kako je ovaj problem nerješiv korištenjem elementarnih konstrukcija. (Merzbach, Boyer, 2011.)

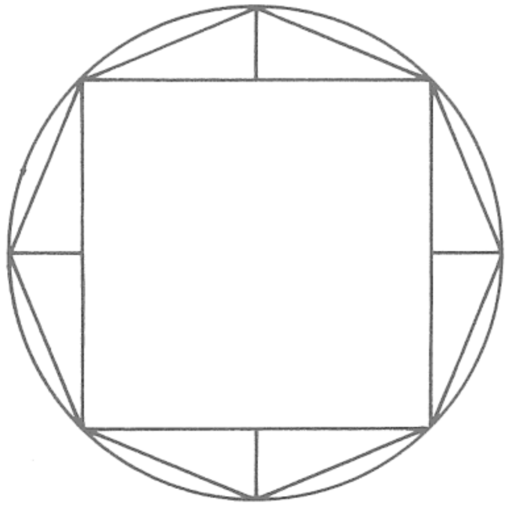
Hipokrat s Hiosa zaključio je da je do duplikacije kocke stranice duljine a moguće doći ako se može konstruirati stranica duljine geometrijske sredine od a i $2a$. Srednje geometrijske proporcionale između zadanih dužina a i b su zapravo dužine x i y za koje vrijedi $a : x = x : y = y : b$. S obzirom na to da je u ovom slučaju b=2a, iz jednakosti se dobije da je $x = a\sqrt[3]{2}$, što je duljina tražene stranice kocke koja je dvostruko veća po volumenu od zadane kocke. Kasnije su se matematičari i dalje uključivali u rješavanje problema, dok 1637. godine Decartes nije naslutio da je problem nerješiv pomoću ravnala i šestara, što je P. L. Wantzel 1837. godine i dokazao.

Trisekcija kuta, kao drugi veliki problem starih Grka, potječe još iz 4. st. pr. n. e. kad se nametnuo prilikom gradnji hramova, spomenika i ornamenata. Hipokrat je ovom problemu dao mehaničko rješenje za čije izvođenje nisu bili dovoljni isključivo ravnalo i šestar, a sastoji se od sljedećem: dan je kut *CAB*, a iz vrha *C* povučena je okomica na pravac *AB*, koji u *D* siječe *AB*. Konstruira se i pravac koji je okomit na *AB* kroz točku *A*, te se tako dobije i pravokutnik *ADCF*. Produlji se pravac *FC* do točke *E*, tako da je $|HE| = 2|AC|$, prilikom čega je *H* sjecište od *AE* i *CD*. Dobijamo da je kut *EAB* jednak trećini kuta *CAB*. (Slika 10.) Kasnije, iako problem nije rješiv, matematičari kao što je Arhimed i drugi filozofi, dobijali su preciznija rješenja problema. (Jankov i Papić, 2012)



Slika 10. Hipokratovo rješenje trisekcije kuta

Trećim se najvećim problemom matematičara Antičke Grčke najviše bavio Antifon (oko 480. g. pr. n. e. – 411. g. pr. n. e.), grčki filozof i matematičar, u 5. st. pr. n. e. Za rješavanje problema kvadrature kruga, Antifon je u krug upisao kvadrat te iznad svake stranice kvadrata konstruirao jednakokračne trokute. Tako je dobio upisani osmerokut, nakon čega je konstrukcijom jednakokračnih trokuta na stranice osmerokuta dobio upisani šesnaesterokut te je nastavkom tog procesa trebalo doći do mnogokuta s velikim brojem stranica koji je istovjetan s kružnicom što određuje krug. (Slika 11.) Tada bi površina mjerenog kruga bila jednaka površini posljednjeg mnogokuta.



Slika 11. Antifonovo rješavanje problema kvadrature kruga

Po antičkom fizičaru i matematičaru Eudoksu takvim se slijedom mnogokuta može približiti kružnici te čak iscrpiti cijela površina kruga, što je razlog zbog čega se ova metoda mjerenja površine kruga naziva *metodom iscrpljenja* ili *ekshaustije*. Metoda je pogodna za sve probleme koji su iracionalni[9], no ako se u postupku ekshaustije dopusti potpuno iscrpljenje površine kruga, odnosno da se konstrukcijom mnogokuta dolazi do kružnice, dopušta se aktualna beskonačnost što za neke fizičare nije bilo prihvatljivo.

Dadić navodi kako su se prema pitagorijanskoj definiciji dvije crte jedna prema drugoj odnosile kao brojevi jedinica sadržanih u te dvije crte. Eudokso napušta ideju takvog razmjera, u kojemu su dva člana geometrijski i dva člana aritmetički oblici te promatra razmjer u kojemu su sva četiri člana geometrijski objekti. Iz tog razloga nije potrebna nikakva opća definicija broja, bez obzira je li taj broj racionalan ili iracionalan. Sada se više ne postavlja pitanje kolika je te što je duljina, površina ili obujam već se postavlja pitanje što je omjer površina dvaju krugova. Na to pitanje Eudokso jednostavno odgovara da je omjer jednak omjeru površini kvadrata konstruiranih nad promjerima krugova. U ovakvim se slučajevima dolazi do uspoređivanja kvadrata s kvadratom, odnosno kruga s krugom. Ta je Eudoksova

[9] Iracionalan (*lat.irrationalis* – nerazuman, nerazborit) – ono što je neovisno o razumu, što se zbiva bez sudjelovanja intelekta ili nije u skladu s razumskim načelima. (http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=27800)

metoda razmjera potaknula na razdvajanje dva područja, geometriju i aritmetiku zato što su se do tada tražile duljine, površine i volumeni.

Iako je Eudoksova metoda poticala na razdvajanja aritmetike i geometrije, pravi je razlog tome Aristotelova kritika nedjeljivih crta, površina i tijela. Dadić navodi: *„Aristotel smatra da crta ne može nastati iz nedjeljivih dijelova, pa ni iz nedjeljivih točaka. Kako nedjeljivo nema dijelova, nema ni krajnjeg dijela, pa krajnja granica jednog ili sljedećeg komada ne može biti jedno. Iz dvije točke ne bi se mogla dobiti nikakva protežnost, nego bi one pale zajedno*." Naprotiv, smatrao je kako je bit neprekinutosti crte u tome što dijelovi koji se nastavljaju, jedni na druge, imaju zajedničku točku. Odnosno, razdvoji li se crta na dva dijela točkom, ta je točka kraj prvoga, tj. početak drugog no brojem je jedno, istovremeno ta ih točka drži zajedno i dijeli. No sve što je neprekinuto djeljivo je u beskonačnost, što za Aristotela nije aktualno beskonačno, već nešto što neprestano nastaje, a samim je time uvijek drukčije. Tako neprekinute veličine mogu biti geometrijski objekti, kao što su crte, površine i tijela, dok su aritmetički objekti, brojevi, nisu neprekinuti već diskretni. Brojevi, odnosno brojanje može se beskonačno nastaviti no broj se ne može beskonačno dijeliti. (Dadić, 1992)

Dolaskom do ovakvog zaključka, da se aritmetika bavi brojevima koji se mogu beskonačno nastaviti ali ne i beskonačno dijeliti, a da se geometrija bavi neprekinutim veličinama koje imaju svojstvo beskonačnog dijeljenja, proces je odvajanja tih dvaju područja bio dovršen.

2.4. Euklidovi elementi

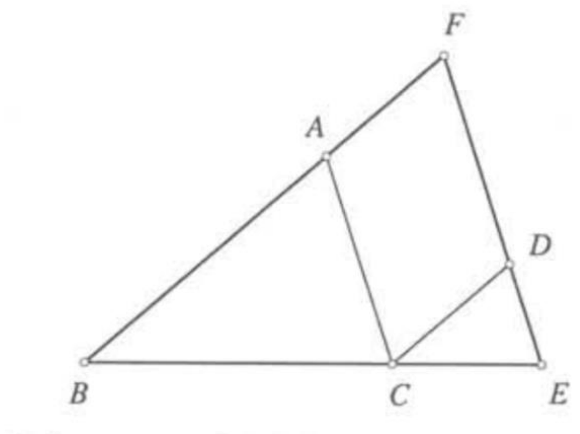
Euklid (330. – 275. g. pr. n. e.), jedan od najvećih antičkih matematičara, živio je u Aleksandriji za vrijeme Ptolomeja Sotera. Smatra se kako je studirao na Platonovoj akademiji u Ateni te da je svoje matematičko obrazovanje usavršio upravo kod Platonovih učenika. Također, na osnovi Platonovih shvaćanja, osnovao je u Aleksandriji matematičku školu *Museion*. Pored toga napisao je mnoga djela, od kojih je sačuvano samo nekoliko dok su neka poznata samo po naslovu. Jedno od sačuvanih djela, koje je ujedno i najvažnije za spoznavanje znanja iz geometrije, je djelo *Elementi* koje je objavljeno oko 300. g. pr. n. e. *Elementi* su vrlo uspješan pokušaj izlaganja elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi dok se prilikom dokazivanja i izlaganja Euklid pristupio u duhu Platonove i Aristotelove koncepcije deduktivne znanosti. Na temelju te koncepcije najprije se utvrđuju temeljni pojmovi te se nakon toga odabiru temeljne činjenice (postulati i aksiomi). Te su činjenice tvrdnje koje se po dogovoru uzimaju kao istinite i ne dokazuju se. Karakter djela potpuno je teorijski i ne sadrži nikakve račune ili primjenu u praksi. (Euklid, 1999)

Izvorni tekst Euklidovih *Elemenata* nije sačuvan, već samo prijepisi sastavljača koji su unosili svoja poboljšanja i primjedbe. Originalni su tekst, na temelju postojećih nezavisnih tekstova krajem 19. st. J. L. Heiberg i H. Menge, njemački matematičar i lingvist, restaurirali te je njihovo izdanje *Elemenata* najznačajnije originalu.

Djelo *Elementi*, sastoji se od 13 knjiga koje se sastoje od ukupno 118 definicija, od kojih je 23 zapisano u prvoj knjizi, nakon kojih Euklid uvodi aksiome i postulate. U prvih se 6 knjiga bavi planimetrijom, odnosno ravninskom geometrijom, koje po redu obuhvaćaju sljedeće: prva knjiga obuhvaća temeljna svojstva geometrije, Pitagorin poučak, jednakost kutova, paralelnost te zbroj kutova u trokutu; u drugoj se knjizi bavi površinom trokuta i četverokuta te zlatnim rezom; treća i četvrta obuhvaćaju krug, kružnicu, njihova svojstva, odsječke i tangente te konstrukciju kružnice opisanih i upisanih trokuta i konstrukcijom pravilnih poligona; peta i šesta knjiga obuhvaćaju omjere veličina i primjenom omjera u geometriji te sličnošću trokuta. Sljedeće se tri knjige bave aritmetikom i teorijom brojeva u geometrijskoj formi, odnosno geometrijskom teorijom cijelih brojeva, deseta bavi teorijom iracionalnih brojeva, dok se posljednje tri knjige bave stereometijom, odnosno izučavanjem svojstava figura smještenih u prostoru. (Cindrić, 2014.)

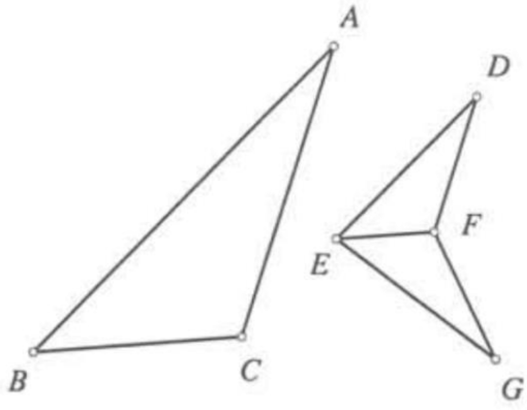
Sličnost trokuta definira u šestoj knjizi Elemenata što dodatno okrepljuje crtežima. Kao prvu definiciju navodi: *„Slični ravnocrtni likovi su takvi koji imaju pojedinačne kutove jednake i stranice oko jednakih kutova proporcionalne.“*

Pod brojem 4. navodi: *„U jednakokutnim su trokutima stranice oko jednakih kutova proporcionalne, a stranice koje leže nasuprot jednakim kutovima odgovarajuće su.“* (Slika 12.) S time da su ABC i DCE jednakokutni trokuti koji imaju $\angle$ABC jednak $\angle$DCE, $\angle$BAC jednak $\angle$CDE i $\angle$BCA jednak $\angle$CED. A za odgovarajuće trokute tvrdi sljedeće: *U trokutima ABC i DCE stranice su oko jednakih kutova proporcionalne, a da su stranice koje leže nasuprot jednakim kutovima odgovarajuće.*



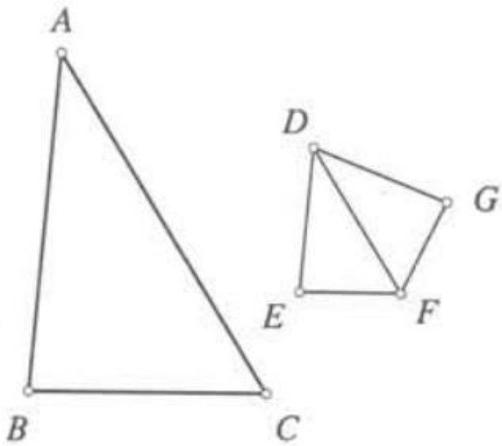
Slika 12. Prikaz četvrtog aksioma šeste knjige djela *Elementi*

Pod brojem 5. navodi: *„Ako dva trokuta imaju proporcionalne stranice, trokuti će biti jednakokutni i imat će jednake one kutove nasuprot kojima leže odgovarajuće stanice.“* (Slika 13.) S time da su ABC i DEF dva trokuta koja imaju proporcionalne stranice, tako da je AB prema BC kao što je DE prema EF, a BC prema CA kao što je EF prema FD i k tome je BA prema AC kao što je ED prema DF. A tvrdi sljedeće: *trokut ABC jednakokutan je trokutu DEF i imat će jednake kutove nasuprot kojima leže odgovarajuće stranice, $\angle$ABC = $\angle$DEF, $\angle$BCA = $\angle$EFD i još $\angle$BAC = $\angle$EDF.*



Slika 13. Prikaz petog aksioma šeste knjige djela *Elementi*

Pod brojem 6. navodi: *„Ako dva trokuta imaju jedan kut jednak jednom kutu, a stranice oko jednakih kutova proporcionalne, trokuti će biti jednakokutni i imat će jednake one kutove nasuprot kojima leže odgovarajuće stranice.“* (Slika 14.) S time da su ABC i DEF dva trokuta koji imaju jedan kut, $\angle$BAC jednak $\angle$EDF, a stranice oko jednakih kutova proporcionalne, tako da je BA prema AC kao što je ED prema DF. A tvrdi: trokut ABC jednakokutan trokutu DEF i da će imati $\angle$ABC jednak $\angle$DEF, a $\angle$ACB jednak $\angle$DEF.



Slika 14. Prikaz šestog aksioma šeste knjige djela *Elementi*

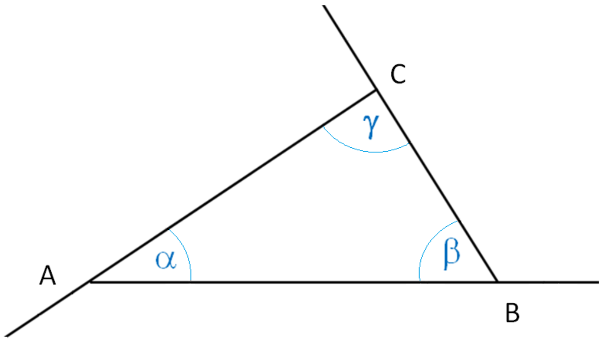
3. Trokut

Trokut je figura u ravnini koja se sastoji od tri nekolinearne[10] točke A, B i C i tri spojene dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tih točaka. Tri točke A, B i C tog trokuta nazivaju se vrhovima, dok se $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ i $\overline{\mathrm{AC}}$ nazivaju stranicama tog trokuta. (Palman, 1994.)

Tri bitna svojstva kod trokuta su sljedeća:

1. *U svakom trokutu zbroj unutarnjih kutova iznosi 180°.*

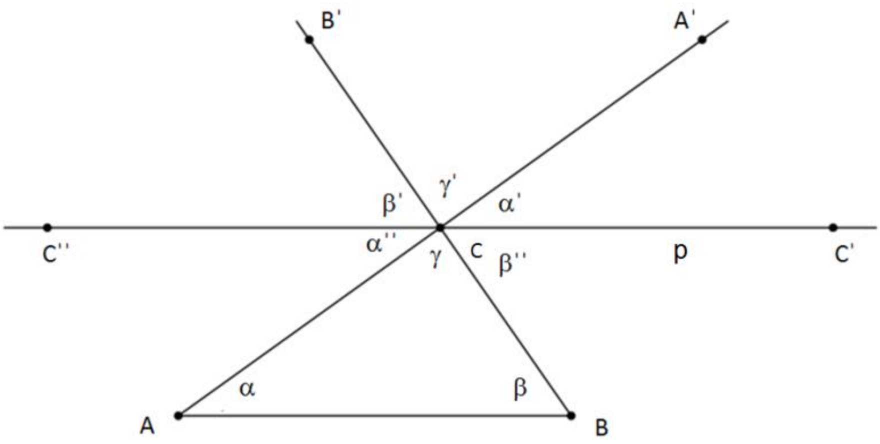
Unutarnji kutovi trokuta su kutovi koji se nalaze unutar trokuta, odnosno kutovi koji se nalaze pri vrhovima. Na slici 15. prikazani su unutarnji kutovi trokuta ABC, a to su kut α pri vrhu A, β pri vrhu B i γ pri vrhu C.



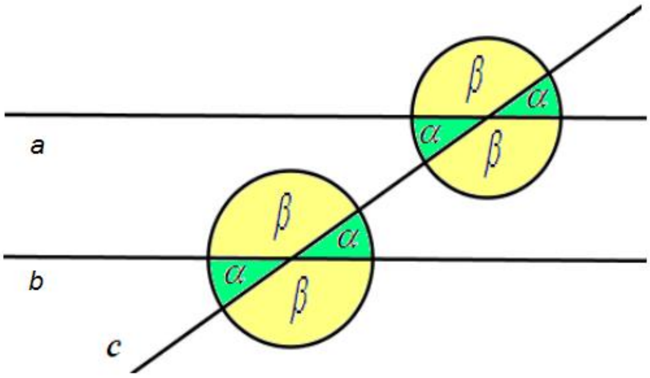
Slika 15. Trokut ABC i njegovi unutarnji kutovi

Dokaz da u svakom trokutu zbroj unutarnjih kutova iznos 180°, što prati slika 16 : *Zadan je trokut ABC. Kroz vrh C provucimo paralelu p s AB, a stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ produljimo preko vrha C. Označimo točke A', B', C', C'' kao na slici. Primjećujemo kako je $\overline{AA'}$ transverzala*[11] *paralelnih $\overline{AB}$i $\overline{CC'}$. Teorem o kutovima uz transverzalu glasi: Transverzala s paralelnim pravcima određuje šiljaste i tupokutne kutove koji su međusobno sukladni.* (Slika 17.) *Na temelju ovog teorema zaključujemo da je $\alpha' = \alpha$, a ako je $\overline{BC}$ transverzala paralelnih $\overline{AB}$ i p, $\beta' = \beta$. Također, $\gamma' = \gamma$ jer se radi o vršnim kutovima. Iz navedenog se da zaključiti da je $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$, odnosno $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Dakle zbroj unutarnjih kutova je 180°.*

[10] Kolinearnost (lat. *collineare* – usmjeriti pravocrtno) – svojstvo skupa točaka da pripadaju istom pravcu.
(http://hjp.znanje.hr/index.php?show=search_by_id&id=eltlXxY%3D)
[11] Transverzala ili presječnica je pravac koji presijeca dva zadana pravca u ravnini ili više njih.
(http://struna.ihjj.hr/naziv/presjecnica/31375/)



Slika 16. Prikaz triju svojstava trokuta



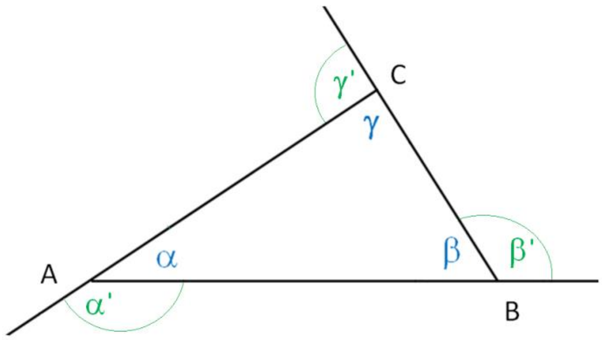
Slika 17. Teorem o kutovima uz transverzalu

2. *Vanjski je kut uz jedan vrh trokuta jednak zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha.*

Vanjski kut trokuta je susjedni kut nekog unutarnjeg trokuta. Na slici 18. prikazani su vanjski kutovi trokuta ABC, kutovi α', β' i γ'.

Ukupan zbroj veličina unutarnjih kutova je 180°, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Također zbroj unutarnjeg i vanjskog kuta je 180°, primjerice $\alpha + \alpha' = 180°$. Dakle, $\alpha' = 180° - \alpha$, odnosno $\alpha' = 180° - \alpha = \beta + \gamma$.

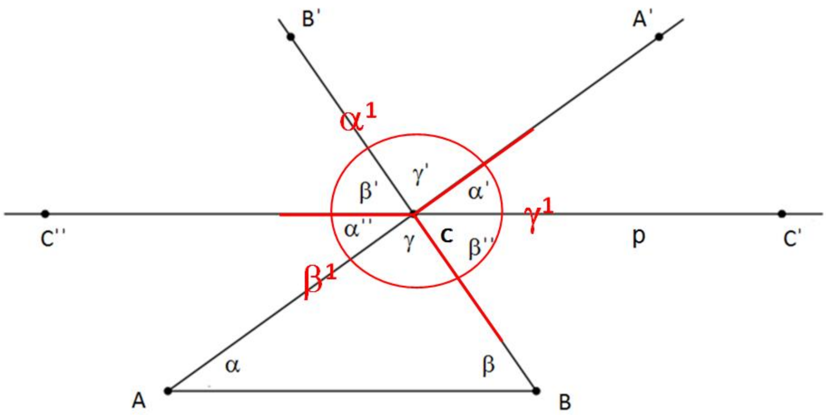
Dokaz na slici 16: *Na temelju prijašnjeg svojstva vrijedi iskaz $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$. Dakle, ako se traži primjerice α', primjećujemo da $\beta' + \gamma'$ iznose jednako kao i vanjski kut α', odnosno $\beta' + \gamma' = 180° - \alpha'$.*



Slika 18. Vanjski kutovi trokuta ABC

3. *U svakom trokutu zbroj vanjskih kutova iznosi 360°.*

Dokaz na slici 19.: *Definirani kut $\alpha^1 = \beta' + \gamma'$ je vanjski kut koji odgovara unutarnjem kutu α, kut $\beta^1 = \alpha'' + \gamma$, vanjski kut koji odgovara unutarnjem kutu β, te $\gamma^1 = \alpha' + \beta''$, vanjski kut koji odgovara unutarnjem kutu γ. Iz toga izvodimo sljedeće: $\alpha_1 + \beta_1 + \chi_1 = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = 2\,(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°$. Primjećujemo na slici također da ta tri kuta, α_1, β_1 i γ_1, čine puni krug od 360°.*



Slika 19. Zbroj vanjskih kutova trokuta

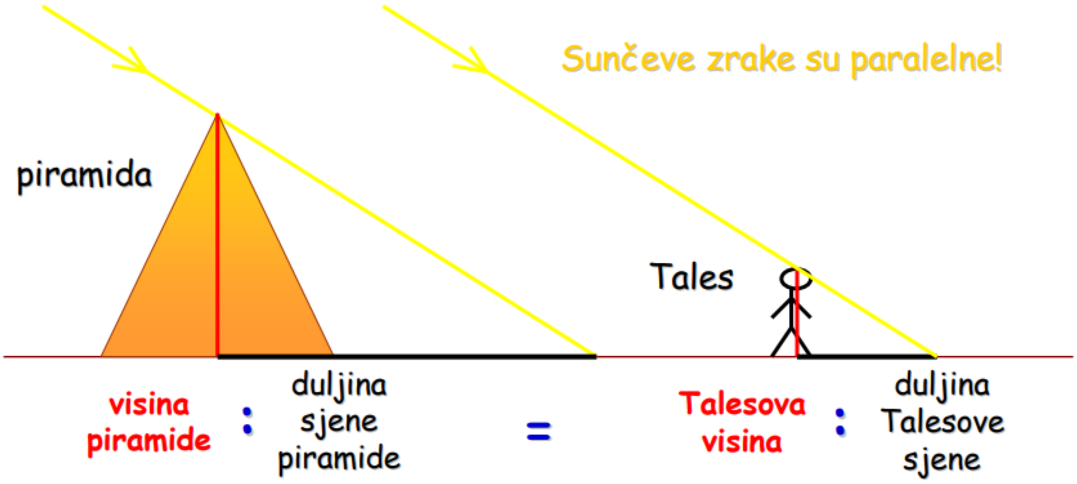
Prema duljinama stranica razlikujemo *raznostranične trokute* (trokuti koji imaju sve tri stranice različitih duljina), *jednakokračne trokute* (trokuti koji imaju dvije stranice trokuta iste duljine, koje se pritom nazivaju kracima tog trokuta, dok se treća stranica naziva osnovicom ili bazom trokuta) i *jednakostranične trokute* (trokuti kojemu su sve tri stranice trokuta jednakih duljina). Prema mjerama kutova, dijele se na *šiljastokutne trokute* (trokuti kojima su sva tri trokuta šiljasta), *pravokutne trokute* (trokuti koji imaju pravi kut) i *tupokutne trokute* (trokuti koji imaju tupi kut).

3.1. Talesov teorem o proporcionalnosti

Nekoliko se teorema, kao što su *Teorem o površini kruga*, *Teorem o sukladnosti trokuta*, *Teorem o jednakokračnom trokutu*, *Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice, Talesov teorem o proporcionalnosti* i *Teorem o vršnim kutovima*, pripisuju Talesu. Teorem koji je blisko vezan za sličnost trokuta i kojeg u ovom poglavlju opisujemo je upravo *Talesov teorem o proporcionalnosti*.

Ovim se rezultatom Tales koristio prilikom računanja visine Kepsove piramide u Egiptu. Točno je izmjerio njenu visinu koristeći se samo užetom i sjenom piramide pri čemu mu je od velike pomoći bilo upravo Sunce.

Promatranjem sjene piramide i sjene koje je stvaralo njegovo tijelo, zaključio je da u trenutku kada duljina njegove sjene koju čini Sunce bude jednaka s njegovom visinom, duljina sjene piramide bit će jednaka visini piramide. Odnosno, koliko puta je njegova visina veća od duljine njegove sjene, toliko je puta visina piramide veća od duljine njezine sjene. (Slika 20.)

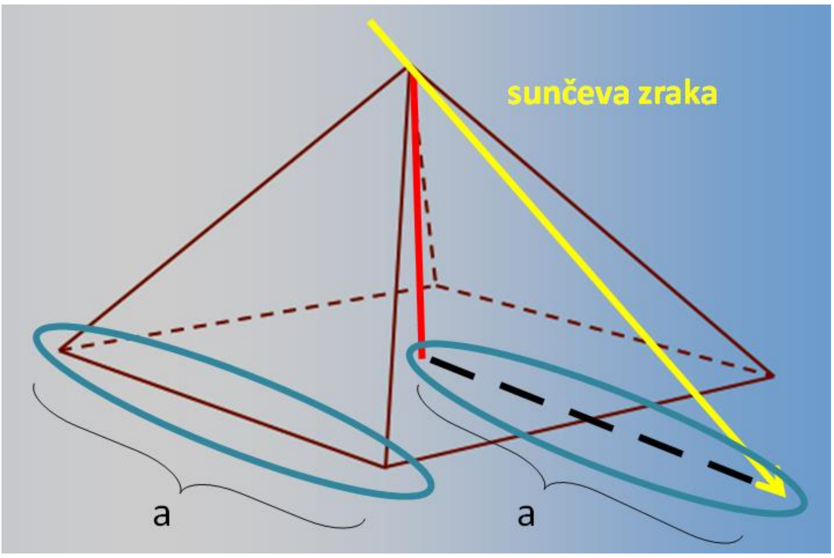


Slika 20. Prikaz odnosa visine piramide i njene duljine sjene s Talesovom visinom i njegovom sjenom (http://os-orebic.skole.hr/upload/os-orebic/images/newsimg/460/File/Keopsova_piramida_i_Tales.pdf)

Užetom bi se to izmjerilo na sljedeći način: uzme se uže dugačko kolika je Talesova sjena i pomoću njega izmjerimo koliko je puta sjena piramide dulja od Talesove, odnosno pomoću njega izmjerio duljinu sjene piramide. No problem koji se pojavljuje prilikom mjerenja je taj što se duljina sjene piramide treba mjeriti od središta baze piramide do kojeg nije moguće doći, stoga se to jedino može riješiti izračunom. (Slika 21.)

Slika 21. Problem prilikom mjerenja visine piramide (http://os-orebic.skole.hr/upload/os-orebic/images/newsimg/460/File/Keopsova_piramida_i_Tales.pdf)

Bez obzira na poteškoće Tales dolazi do rješenja. Pomicanjem piramidine sjene pomiče se i linija koja povezuje vrh sjene piramide sa središtem baze piramide. U trenutku kada ta linija bude paralelna s osnovicom baze, dio sjene koji se nalazi unutar piramide bit će iste dužine kao polovica osnovice baze. (Slika 22.)

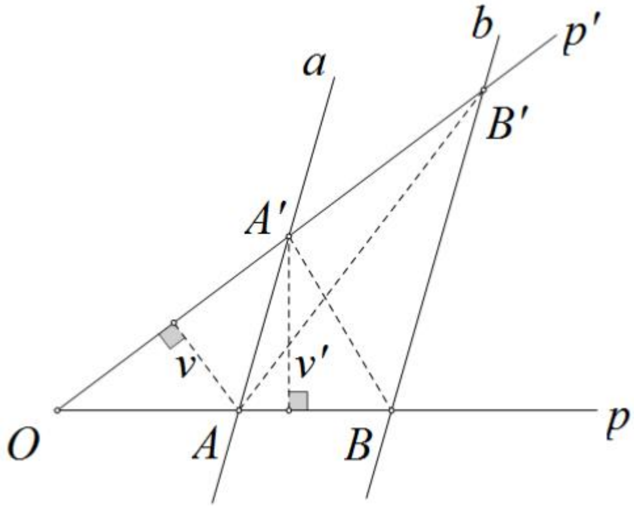


Slika 22. Izračun duljine sjene piramide (http://os-orebic.skole.hr/upload/os-orebic/images/newsimg/460/File/Keopsova_piramida_i_Tales.pdf)

Dakle, Talesov teorem o proporcionalnosti glasi: *dva paralelna pravca na krakovima nekog kuta odsijecaju proporcionalne dužine*.

Dokazat ćemo teorem u sljedećoj formi (Kralj, 2014.): *Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle$pOp' odsijecaju proporcionalne dužine* (Slika 23.) te vrijedi:

1.) $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$,2.) $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$, 3.)$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$.



Slika 23. Talesov teorem o proporcionalnosti

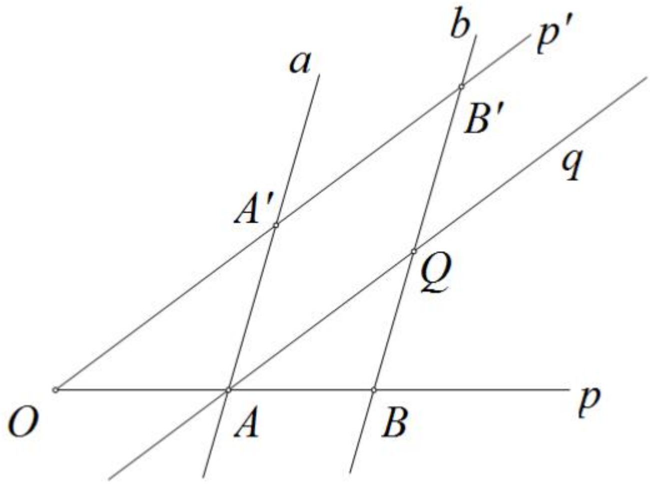
Dokaz: Za prvu jednakost uočimo promatranjem površina trokuta sljedeće: *površina trokuta OAB' = P(OAA') + P(AA'B') , P(OA'B) = P(OAA') + P(AA'B).*

Pravci a i b su paralelni te je s toga duljina visine na stranicu AA' u trokutu AA'B jednaka duljini visine na istu stranicu u trokutu AA'B', što znači P(AA'B) = P(AA'B'). Stoga je P(OAB') = P(OA'B) te je $\frac{P(OAA')}{P(OA'B)} = \frac{P(OAA')}{P(OAB')}$. S obzirom na to da je visina iz vrha A' zajednička trokutima OAA' i OA'B, lijeva strana jednakosti jednaka je $\frac{|OA|}{|OB|}$. Visina iz vrha A zajednička je trokutima OAA' i OAB' pa je desna strana jednakosti upravo $\frac{|OA|}{|OB|}$.

Drugu jednakost (Slika 23.) dobijamo ovako: $\frac{|A'B'|}{|OA'|} = \frac{|OB'|-|OA'|}{|OA'|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} - 1$, što uz prethodno dokazanu tvrdnju daje $\frac{|A'B'|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OA|} - 1$, odnosno dobivamo traženo

$$\frac{|OB|-|OA|}{|OA|} = \frac{|AB|}{|OA|}.$$

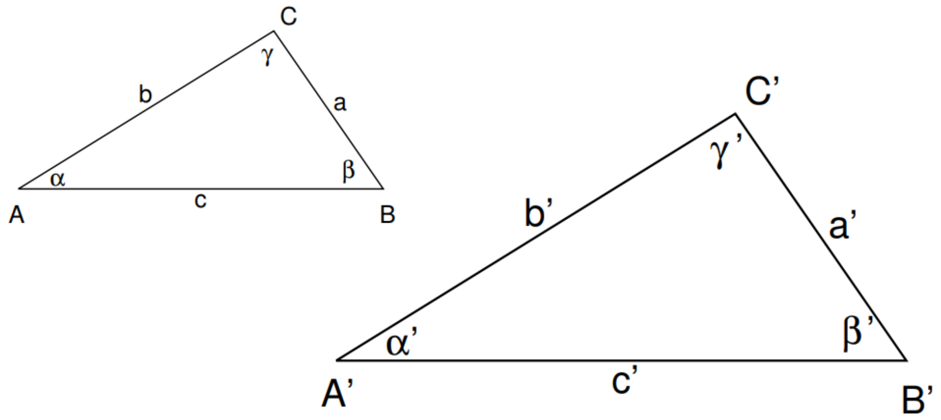
Promatranjem slike 24. lako se može dokazati treća tvrdnja. S *q* označimo pravac koji prolazi točkom A i koji je paralelan s *p′*, a s Q označimo točku presjeka pravca *b* i *q*. Prema prvoj jednakosti, paralelni pravci p' i q na krakovima OBB' odsijecaju proporcionalne dužine te iz toga vrijedi: $\frac{|BA|}{|BO|}=\frac{|BQ|}{|BB'|}$. Iz toga slijedi $\frac{|OB|-|OA|}{|OA|}=\frac{|BB'|-|QB'|}{|BB'|}$, dalje se dobija 1-$\frac{|OA|}{|OB|}$=1-$\frac{|QB'|}{|BB'|}$, odnosno $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|QB'|}{|BB'|}$.



Slika 24. Talesov teorem o proporcionalnosti – treća jednakost

3.2. Sličnost trokuta

Ako imaju jednake kutove, a odgovarajuće stranice su im međusobno proporcionalne, za dva trokuta kažemo da su slična. Oznaka za sličnost je ~. Za dva slična trokuta, ΔABC i ΔA'B'C' ispunjene su, dakle, sljedeće jednakosti: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ i $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$. (Slika 25.)



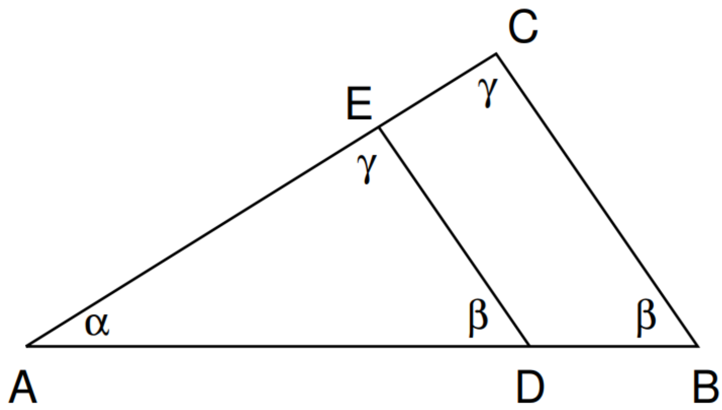
Slika 25. ΔABC ~ΔA'B'C'

Uz pomoć triju poučaka o sličnosti dvaju trokuta možemo ustanoviti koje su od šest jednakosti dovoljne kako bismo zaključili da su dva trokuta slična:

1. **K – K – K** (kut - kut - kut) poučak: *Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutovi jednaki*: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$.

Dokaz: Neka dva zadana trokuta, ΔABC i ΔADE imaju parove sukladnih kutova. Tada ih možemo poklopiti u jednom kutu, primjerice u α, na način kao što je na slici 26 (zato što se jedan trokut može okrenuti). Onaj trokut kojemu je stranica nasuprot vrha A dulja, „virit će“ kao u ovom slučaju trokut ABC. Točka D na stranici $\overline{AB}$ je takva da je $|AD| < |AB|$. S obzirom na to da znamo da su $\angle$BCA i $\angle$DEA, te $\angle$ADE i $\angle$ABC jednaki, po obratu teorema o kutovima uz presječnicu zaključujemo kako su $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ paralelne.

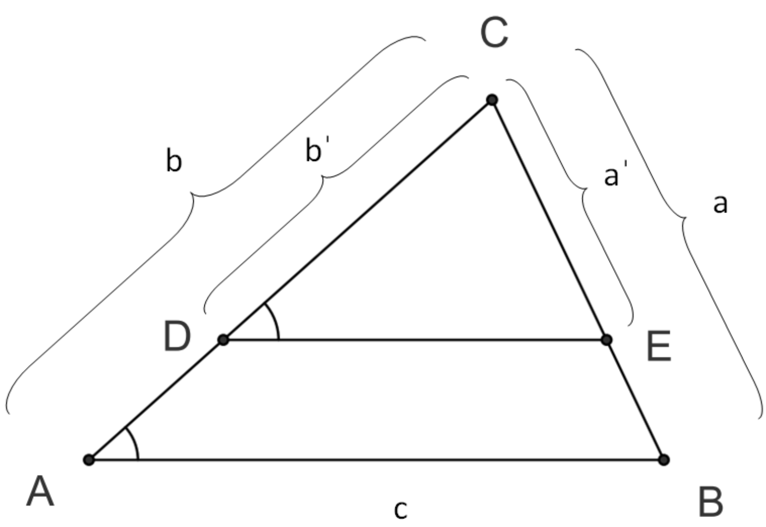
Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$, odnosno $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$. Iz toga se može zaključiti kako su ΔABC i ΔADE slični. (Slika 26.)



Slika 26. K – K – K poučak

2. **S – S – S** (stranica - stranica - stranica) poučak: *Dva su trokuta slična ako su im sva tri para pridruženih stranica proporcionalna*.

Dokaz: Neka su trokuti ABC i A'B'C' su takvi da je $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Neka je b ≠ b', odnosno b' < b. (Slika 27.) Neka je točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je │CD│= b', a točka E neka je sjecište dužine $\overline{BC}$ i paralele s AB kroz D. Prema Talesovom teoremu proporcionalnosti je $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|BC|}$ iz čega slijedi $\frac{|DE|}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{|CE|}{a}$, $\frac{|DE|}{c} = \frac{c'}{c}$, $\frac{|CE|}{a} = \frac{a'}{a}$ te je │DE│=c' i │CE│=a'. U tom je slučaju │DE│ = │A'B'│, │CE│ = │B'C'│, │CD│= │A'C'│, pa su trokuti DEC i A'B'C' sukladni. Znači da su kutovi trokuta A'B'C' sukladni kutovima trokuta DEC te kutovima trokuta ABC. Iz toga slijedi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ te su trokuti ABC i A'B'C' slični.

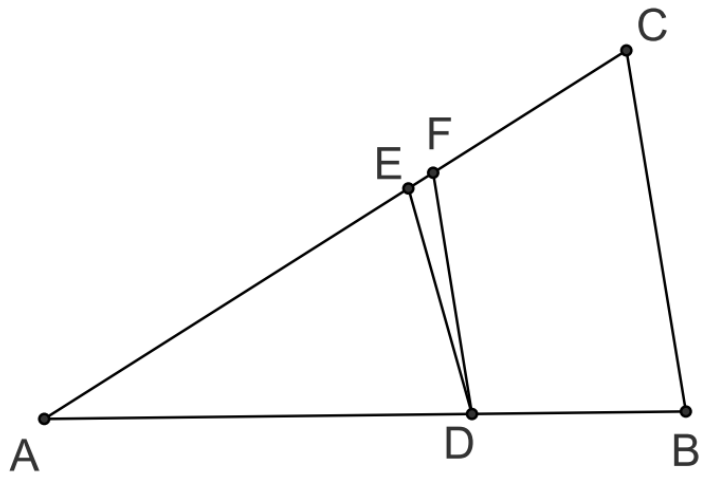


Slika 27. S – S – S poučak

3. **S – K – S** (stranica - kut - stranica) poučak: *Dva su trokuta slična ako su im dva para pridruženih stranica proporcionalna i kutovi što ih one zatvaraju jednaki.*

Dokaz: ΔABC i ΔA'B'C' su takvi da je $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ i $\alpha = \alpha'$. Neka je c ≠ c', odnosno c' < c. Neka je točka D na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AD|$ = c', a točka E na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|AE|$ = b'. Iz $|AD| = |A'B'|$, $|AE| = |A'C'|$, $\angle EAD = \angle C'A'B'$ slijedi da su ΔADE i ΔA'B'C' sukladni te je iz toga $\angle ADE = \beta$, $\angle AED = \gamma$, $|DE| = |B'C'|$.

Točka F na pravcu AC takva je da su pravci DF i BC paralelni. (Slika 28.) Prema Talesovom teoremu proporcionalnost slijedi $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AF|}$, $\frac{c}{c'} = \frac{b}{|AF|}$ te zbog $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ slijedi $|AF|$ = b', odnosno $|AF| = |AE|$. Može se zaključiti da se točke E i F podudaraju, te su pravci DE i BC paralelni. Iz toga je $\angle ADE = \beta$ i $\angle AED = \gamma$, pa je $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$. Prema teoremu proporcionalnosti je i $\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, što znači da su ΔABC i ΔA'B'C' slični.



Slika 28. S – K – S poučak

4. Prilagođenost teme za obradu u razrednoj nastavi

Prema postojećem Nastavnom planu i programu (https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf, kolovoz 2006.), obrada sličnosti trokuta predviđena je za sedmi razred osnovne škole, stoga bi Talesov način mjerenja bio pogodan za obradu s učenicima istog uzrasta. No ideja ovog rada je istražiti mogućnost prilagodbe navedenih tema, kojima bi se indirektno došlo do poučka ili se u zadacima koristio njegov rezultat, jednako kao i prilikom dijeljenja dužine u zadanom omjeru. S obzirom na to da se u prva tri razreda trokut obrađuje na nivou prepoznavanja oblika te dužina koje ga omeđuju četvrti razred čini se najpovoljniji za provedbu ovog sadržaja.

Razlog zašto se ovakve teme ne obrađuju prije navedenog u Nastavnom planu i programu je upravo zato što manja djeca nisu u mogućnosti shvaćati tako zahtjevne i apstraktne teme. Mišljenje učenika četvrtog razreda znatno se razlikuje od mišljenja učenika viših razreda osnovne škole. Dijete uspijeva shvatiti pred njim postavljene probleme prvenstveno na temelju konkretnih operacija čija struktura ne prelazi razinu elementarnih logičkih grupiranja. Adolescent pak s druge strane nadograđuje logiku iskaza na logiku klasa i relacija te tako izgrađuje formalni mehanizam koji mu omogućuje da sjedini u istu cjelinu inverziju i reciprocitet, te da ovladava hipotetsko-deduktivnim rasuđivanjem i eksperimentalnim dokazivanjem. Dakle, stariji učenici imaju daleko razvijeniju mogućnost shvaćanja apstraktnih pojmova za razliku od učenika mlađe školske dobi. (Piaget, Bärbel, 1986.)

Nastavni plan i program je upravo i prilagođen mogućnostima učenika. Teme se obrađuju u onoj dubini u kojoj bi ih svi učenici trebali moći aktivno popratitit. Upravo zbog različitih mogućnosti mišljenja, nastavni plan i program je prilagođen mogućnostima učenika. Tako su učenička postignuća nižih razreda, odnosno obrazovno-odgojni ishodi koji predstavljaju kompetencije koje učenici trebaju steći završetkom nastavne teme, programa, stupnja obrazovanja ili odgojno-obrazovnog ciklusa znatno razlikuju od postignuća u višim razredima. Ishodi su u prva tri razreda opisani glagolima kao što su: *razlikovati, crtati, označavati, prepoznati, imenovati, upoznati* koji se odnose na konkretne operacije, odnosno rad na konkretnim primjerima koji trebaju učenicima biti predočeni u stvarnosti. Također može se primijetiti da su oni većinom praktičnog oblika za što nije potrebno naprednije logičko zaključivanje. Četvrti se razred već temelji na malo naprednijim ishodima kao što su *izmjeriti, znati, odrediti* što predstavlja pripremu učenika na zahtjevnije probleme u kasnijim razredima. Ishodi viših razreda, s obzirom na to da su učenici u mogućnosti usvajanja apstraktnih pojmova, su iskazani glagolima koji ukazuju na samostalna logička razmišljanja kao što su *primjenjivati stečena znanja, izračunavati, preračunavati, konstruirati, organizirati, istražiti* i sl.

Upravo zbog toga što se u četvrtom razredu smanjuje količina konkretnih u korist apstraktnih sadržaja, i s obzirom na to da su tijekom školske godine trebali usvojiti temeljna znanja vezana za trokute, smatram kako bi se tema *Sličnost trokuta i Talesovo mjerenje visine piramide* mogla provesti u četvrtom razredu osnovne škole, naglaskom na prilagođavanju teme uzrastu i mogućnostima učenika. S obzirom na to da je potrebno predznanje o trokutima, provedba ove teme bila bi moguća na kraju školske godine. Pritom je izazov uključiti sve učenike, zbog nedovoljne razine prethodno usvojenog sadržaja ili naprosto manjka zainteresiranosti.

4.1. Plan i program matematike u osnovnoj školi

Osnovni ciljevi matematičkog osnovnoškolskog obrazovanja učenika su stjecanje znanja, vještina i sposobnosti računanja, procjenjivanja te logičkog i prostornog mišljenja, što sve pak priprema učenike za postavljanje i rješavanje matematičkih problema i primjenu u realnom okruženju te potiče na istraživanje, sustavnost, kreativnost, korištenje informacija iz različitih izvora, samostalnost i ustrajnost. Rješavanjem matematičkih problema koji proizlaze iz svakodnevnih, stvarnih i smislenih situacija učenici razumiju važnost matematike u svakodnevnom životu i povezuju matematiku sa svakodnevnim životom te drugim područjima odgoja, obrazovanja i ljudskih djelatnosti.

Prema odgojno-obrazovnim ciljevima matematičkog područja učenici će u sklopu osnovnoškolskog matematičkog obrazovanja (Nastavni plan i program za osnovnu školu, 2006.):

- usvojiti temeljna matematička znanja, vještine i procese te uspostaviti i razumjeti matematičke odnose i veze;
- biti osposobljeni za rješavanja matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada;
- razviti pozitivan odnos prema matematici, odgovornost za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim postignućima;

- prepoznati i razumjeti povijesnu i društvenu ulogu matematike u znanosti, kulturi, umjetnosti i tehnologiji te njezin potencijal za budućnost društva;
- biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje
- učinkovito komunicirati matematička znanja, ideje i rezultate služeći se različitim prikazima;
- učinkovito primjenjivati tehnologiju;
- steći čvrste temelje za cjeloživotno učenje i nastavak obrazovanja.

Prema strukturi *Nacionalni okvirni kurikulum* se dijeli na odgojno-obrazovne razine i odgojno-obrazovne cikluse. Tako razredna nastava prema odgojno-obrazovnoj razini spada u osnovnoškolsko opće obvezno obrazovanje, dok prema odgojno-obrazovnim ciklusima spada u prvi ciklus kojeg čine I., II., III. i IV. razred osnovne škole, a prema prijedlogu Okvira nacionalnog kurikuluma (https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2017/OBRAZOVANJE/NACION-KURIK/okvir_nacionalnoga_kurikuluma.pdf, prosinac 2017.) prva dva razreda zajedno s predškolskim odgojem čine I. ciklus, dok treći, četvrti i peti razred osnovne škole formiraju II. ciklus, u kojem se ostvaruje prijelaz na apstraktniji način razmišljanja. Odgojno-obrazovni ciklusi su odgojno-obrazovna razdoblja učenika koja čine jednu cjelinu, a obuhvaćaju nekoliko godina školovanja tijekom određene odgojno-obrazovne razine i imaju zajedničke odgojno-obrazovne ciljeve, odnosno očekivanja koja učenik treba postići. Tako će u prvom odgojno-obrazovnom ciklusu za stjecanje temeljnih kompetencija učenici u domeni *Oblik i prostor*(Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje, 2010.):

- opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (npr. kvadratna mreža);
- prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove;
- skicirati jednostavne ravninske oblike te ih nacrtati služeći se geometrijskim priborom;
- prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima;
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale;

- prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnom životu.

U novom prijedlogu nacionalnog kurikuluma nastavnog predmeta Matematika (https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2018/OBRAZOVANJE/Nacionalni-kurikulumi/matematika_nakon_recenzije.pdf,) raspisani su ishodi za domenu Oblik i prostor po razredima koji u najvećoj mjeri odgovaraju ovim već navedenim ishodima, odnosno ishodi Nacionalnog okvirnog kurikuluma iz 2010. godine sažimaju one iz prijedloga kurikuluma iz 2017. godine. Pritom realizacija u nastavi, odnosno Nastavni plan i program iz 2006. godine, ne odgovara u potpunosti navedenom. Dovoljno se ne ostvaruju sljedeća dva ishoda: opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije, te Sastavljanje i rastavljanje ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale.

4.2. Sličnost trokuta u planu i programu za učenike u osnovnoj školi

Nastavna tema *Sličnost trokuta i primjena* prema nastavnom planu i programu, obrađuje se u sedmom razredu osnovne škole. Po obradi navedene teme učenici su usvojili pojam sličnosti trokuta, znaju poučke o sličnosti trokuta, izračunavaju duljine stranica, opseg te površinu sličnih trokuta.Tome prethodi usvajanje gradiva nastavne teme *Omjer i proporcija* te *Proporcionalne veličine* prilikom čega učenici mogu određivati bilo koji nepoznati član proporcije koristeći osnovno svojstvo proporcije te prepoznati proporcionalne veličine u zadatcima iz svakidašnjice.

No, obradi te nastavne teme prethodi upoznavanje s bitnim geometrijskim elementima koji se obrađuju u prethodnih šest razreda osnovne škole, a temelj su za razumijevanje kako navedene teme, tako i općenito geometrije i njenih sadržaja. Sadržaji nastave geometrije kreću se od geometrijskih tijela, ploha, crta, geometrijskih likova, preko dužine, pravca i polupravca, kruga i kružnice, do detaljnije analize trokuta, pravokutnika i kvadrata. Nastavne teme s geometrijskim sadržajem, koje se pritom neke odnose na koncept *Oblik i prostor*, a neke na koncept *Mjerenje* su: *Točka*, *Geometrijska tijel*a i *Geometrijski likovi*. Postignuća učenika tih tema su isticanje točke kružićem ili križićem, označavanje točke velikim tiskanim slovima, spajanje ravnom ili zakrivljenom crtom dvije točke, te prepoznavanje, imenovanje i razlikovanje kruga, trokuta, pravokutnika i kvadrata.

U drugom razredu obrađuju se teme: *Dužina kao spojnica dviju različitih točaka* te *Stranica kvadrata, pravokutnika i trokuta*. Što učenici moraju postići završetkom drugog razreda jest nacrtati i imenovati dužinu te označiti krajnje točke, razlikovati točke koje pripadaju ili ne pripadaju dužini te uočiti stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta kao dužine.

U trećem se razredu obrađuju teme kao što su: *Ravnina i likovi u ravnini*, *Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca*, *Mjerenje dužine*, *Pravci koji se sijeku i usporedni pravci* i *Okomiti pravci*. Kroz te teme bitno je postići da učenici shvaćaju ravninu kao neograničenu ravnu plohu i likove kao dijelove ravnine, crtaju i označuju pravac i polupravac, crtaju dužinu kao dio pravca i ističu njezine krajnje točke, poznaju jedinice za mjerenje duljine, mjere zadanu dužinu jediničnom dužinom, prenose zadane dužine, crtaju dužine zadane duljine, preračunavaju mjerne jedinice za duljinu, crtaju pravce koji se sijeku i određuju im sjecište, crtaju usporedne pravce, prepoznaju okomite pravce i crtaju okomite pravce.

U sklopu četvrtog razreda obrađuju se *Kut*, *Pravi kut*, *Šiljasti i tupi kutovi*, *Trokut*, *Vrste trokuta s obzirom na stranice*, *Pravokutni trokut* i *Opseg trokuta*. Postignuća su shvaćati kut kao dio ravnine omeđen polupravcima, crtati, imenovati i označavati vrh i krakove kuta, crtati i označavati pravi kut, crtati šiljasti i tupi kut, razlikovati pravi, šiljasti i tupi kut, crtati trokut, istaknuti i označavati vrhove, stranice i kutove trokuta, uspoređivati duljine stranice trokuta, razlikovati, crtati i imenovati trokute s obzirom na duljinu stranica, prepoznati, imenovati, crtati i pravilno označiti pravokutni trokut, razumjeti opseg trokuta kao zbroj duljina njegovih stranice te izračunati opseg trokuta. (Nastavni plan i program za osnovnu školu, 2006.)

5. Pripreme za izvođenje nastavnog sata iz matematike

1. Sat

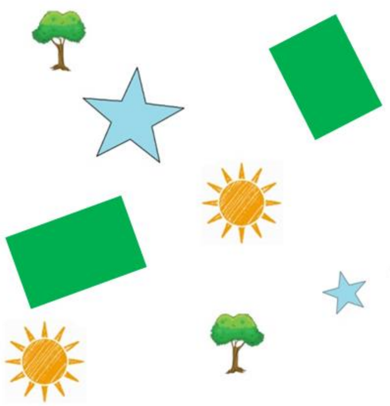
RAZRED: 4. razred

NASTAVNA TEMA/ CJELINA: Pojam sličnosti i sukladnosti likova

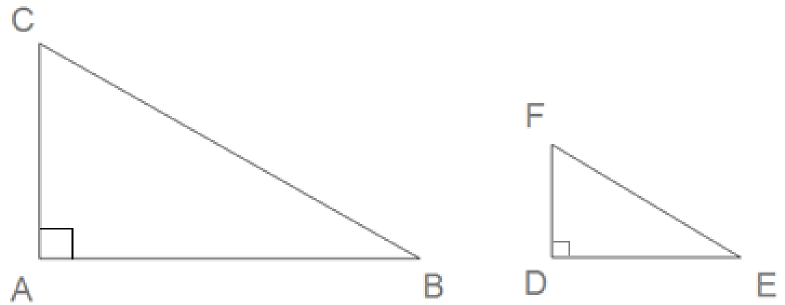
Opći metodički podaci	
Vrsta nastavnog sata:	Sat obrade
Ključni pojmovi:	Sličnost i sukladnost likova, Sličnost i sukladnost trokuta
CILJ NASTAVNOG SATA:	Uvesti učenike u pojam sličnosti i sukladnosti likova, razumjeti pojam sličnosti i sukladnosti trokuta
Međupredmetna korelacija:	Priroda i društvo
Unutarpredmetna korelacija:	Kut, Pravokutni trokut, Pravi kut, Trokut
Mediji (nastavna sredstva i nastavna pomagala):	Slike stabala, zvijezdi, Sunca i četverokuta
Socijalni oblici rada:	Frontalni rad, individualni rad
Nastavne metode:	Metoda razgovora, metoda crtanja
OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA: a) temeljna znanja b) vještine i sposobnosti	Učenici će: - razlikovati slične i sukladne trokute - definirati proporcionalnost veličina, sličnost i sukladnost likova - prepoznati slične i sukladne trokute Učenici će: - primjenjivati stečeno znanje u rješavanju

	zadataka - prepoznavanje sukladnih likova preklapanjem - skicirati slične i sukladne trokute
c) stavovi i vrijednosti	Učenici će: - razvijati sposobnost za samostalni rad, odgovornost, točnost, radne navike i urednost - pridonositi stvaranju poticajnog i ugodnog ozračja u razredu
Korišteni izvori u izradi pripreve:	Markovac, J., *Metodika početne nastave matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 2001. Paić, G., Mnzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N., *Matematičkim stazama 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

Struktura nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:	Metodičko oblikovanje:	Vrijeme:
Uvodni dio Upoznavanje sa sadržajem	Slušanje, odgovaranje na pitanja.	Frontalni rad	20 min
Glavni dio Objašnjavanje novog sadržaja.	Odgovaranje na pitanja, rješavanje zadatka.	Frontalni rad, individualni rad	20 min
Završni dio Ponavljanje	Odgovaranje na pitanja.	Frontalni rad, individualan rad	5 min

Tijek nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:
Uvodni dio sata (20 min) Prije početka sata učiteljica na ploču lijepi četiri para sličica od kojih je jedan par sličnih likova (Stranice velike zvijezde 2 su puta veće od stranica male zvijezde.), dva para sukladnih likova te jedan par likova koji nisu niti slični niti sukladni. Likovi su isprintani na tankom papiru, tako da se prilikom preklapanja listova može vidjeti lik na donjem papiru. Također sličice su prikazane na prednjoj i zadnjoj strani lista, tako da prilikom okretanja lista vidimo zrcalni odraz lika. 	

Učiteljica usporedno postavlja pitanja: „*Što vidite na slikama?*“ (2 Sunca, 2 stabla, 2 zvijezde i 2 pravokutnika.).	Odgovaranje na pitanja.
Proziva učenika pred ploču i zadaje zadatak: *„Uspoređujemo li dvije slike Sunca, što za njih možeš reći?“*, *„Kakve su veličine?“* (Dva su Sunca jednake veličine.), *„Pokaži.“* Učenik uzima par slika Sunca, te ih preklapa. Okreće ih prema razredu i pokazuje da preklapanjem možemo vidjeti kako su sličice iste, odnosno jednake.	Uspoređivanje pojmova.
Nakon toga učiteljica postavlja sljedeće pitanje: *„A možemo li isto reći i za sličice stabala?“*. Učenicima je zadatak da dođu do zaključka i okrenu jednu sličicu stabla kako bi se nakon preklapanja sličice slagale. (Zrcaljenje.)	
Učiteljica navodi: *„Za takve likove koji se međusobno podudaraju, odnosno ako preklapanjem primijetimo da su istog oblika i veličine, kažemo da su SUKLADNI.“*	Slušanje.
Nakon toga se učiteljica vraća na sličice: *„Za koje još likove na ploči možete reći da su slični oblikom?“* (Zvijezde.).	
Postavlja pitanje: *„Uspoređujemo li zvijezde, što za njih možeš reći?“* (Jedna je zvijezda veća od druge.).	
Postavlja pitanje za sve učenike: *„Što je kut?“* (Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima s istom početnom točkom.), „Gdje kod zvijezda možemo uočiti kutove?“. Proziva učenika pred ploču i zadaje mu zadatak da pokaže i usporedi kutove velike i male zvijezde, odnosno da preklopi zvijezde tako da im uskorеđuje kut po kut. Dolazi do zaključka da su kutovi zvijezda jednaki, odnosno sukladni.	Odgovaranje na pitanja. Slušanje.
Učiteljica navodi: *„Likove koji su oblikom isti, no veličinom različiti, kao što su u našem slušaju zvijezde, nazivamo SLIČNIM LIKOVIMA.“*	
Učiteljica navodi kako je tema današnjeg sata Sličnost i sukladnost likova.	Zapisivanje u

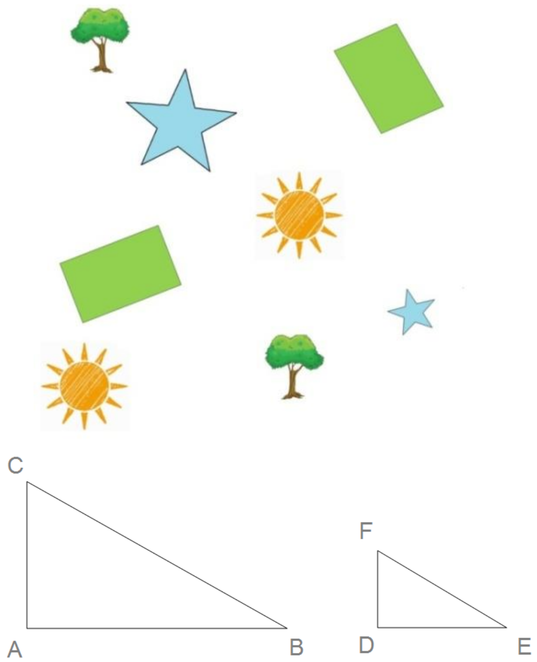
Glavni dio sata (20 min) Nakon toga učenici otvaraju bilježnice i zapisuju naslov SLIČNI I SUKLADNI LIKOVI. Zapisuju definiciju: *Dva su lika* <u>*sukladna*</u> *ako su oblikom i veličinom jednaki.* Učiteljica navodi: *Dakle, možemo ih pomicanjem i okretanjem dovesti jednog na drugog tako da se savršeno poklapaju.* Zadatak im je ispod naslova nacrtati dva jednostavna sukladna lika. Nakon toga zapisuju definiciju: *Dva su lika* <u>*slična*</u> *ako su oblikom isti no veličinom različiti.* Učiteljica nakon toga postavlja pitanje: *Što smo uočili da znači da su likovi oblikom isti?, Kakvi su im kutovi?* (Međusobno jednaki – sukladni.) Učiteljica nakon toga nastavlja: *„Kako nazivamo dio ravnine koji je omeđen trima dužinama?“* (Trokut.), *„Koliko vrhova ima trokut?“* (Trokut ima tri vrha.), *„Kako ih tipično označavamo?“* (Označavamo ih velikim tiskanim slovima.), *„Na koji način ih uobičajeno označavamo?“* (Abecednim redom u smjeru kazaljke na satu.), *„Koliko stranica ima trokut?“* (Trokut ima tri stranice.), *„Kako tipično označavamo stranice trokuta?“* (Označavamo ih malim pisanim slovima.), *„Koliko kutova ima trokut?“* (Trokut ima 3 kuta.). Učiteljica na ploču crta 2 slična trokuta različite veličine. 	bilježnice. Slušanje i odgovaranje na pitanja. Odgovaranje na pitanja.

Učiteljica poziva učenika pred ploču te postavlja učenicima pitanja: *„Kako se zovu trokuti koje sam nacrtala na ploču?“* (Trokut ABC i trokut DEF.), *„Kakvi su ovo trokuti?“* (Pravokutni trokuti.), *„Kako znamo da su ovo pravokutni trokuti?“* (Zato što imaju po jedan pravi kut.), *„Kako znamo da imaju po jedan pravi kut?“* (Imaju označene prave kutove), *„Kako možemo provjeriti jesu li ova dva trokuta slična?“* (Tako da im izmjerimo i usporedimo preostala dva kuta.). Navođenjem i pokazivanjem učiteljice dolaze do zaključka da ∠ACB mora biti jednak ∠DFE, odnosno ∠ABC mora biti jednak ∠DEF. Učeniku na ploči daje zadatak da izmjeri duljinu $\overline{AB}$ i duljinu $\overline{DE}$. Učenik mjeri duljinu $\overline{AB}$ koja iznosi 80cm, odnosno duljinu $\overline{DE}$ koja iznosi 40cm. Sljedeći učenik na ploči mjeri duljinu $\overline{BC}$, koja iznosi 100cm, odnosno duljinu $\overline{EF}$ koja iznosi 50cm. Nakon toga poziva sljedećeg učenika pred ploču i daje sljedeći zadatak, izmjeriti duljinu $\overline{CA}$, odnosno $\overline{DF}$. Učenik mjeri duljinu $\overline{CA}$ koja iznosi 60cm, odnosno duljinu $\overline{FD}$ koja iznosi 30cm. Učiteljica postavlja pitanja: *„Što možemo zaključiti ako uspoređujemo duljine stranica trokuta ABC i trokuta DEF?* (Da su stranice trokuta ABC dva puta veće od stranica trokuta DEF.) Učiteljica zatim pojašnjava: *„Za takve veličine koje ovise jedna o drugoj na način da koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta poveća (smanji) druga veličina, kažemo da su PROPORCIONALNE.“* Učenici zapisuju definiciju proporcionalnosti u bilježnicu. *(Proporcionalne veličine su veličine koje ovise jedna o drugoj tako da koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta poveća (smanji) druga veličina.)*	Rješavanje zadataka na ploči. Zaključivanje i odgovaranje na pitanja. Rješavanje zadataka.

Također dodaje kako prilikom crtanja sličnih trokuta, stranice tih trokuta moraju biti proporcionalne, odnosno: *Dva su trokuta slična ako su kutovi tog trokuta jednaki, a stranice proporcionalne.* Učenicima je zadatak nacrtati dva slična trokuta iz prošlog zadatka, prilikom čega jedan ima 2 puta dulje stranice od drugog. Nakon toga učiteljica zadaje zadatak da nacrtaju dva slična trokuta. Stranice većeg trokuta trebaju biti 3 puta dulje od stranica manjeg. Pojašnjava kako im je zadatak prvo zadati duljine stranica prvog trokuta (npr. 2cm, 3cm, 3cm). Sljedeće izračunavaju stranice drugog (npr. 2x3 = 6cm, 3x3=9cm, 3x3=9cm). Nakon toga crtaju dužinu npr. AB koja označava jednu stranicu (npr 6 cm), u šestar prvo uzimaju veličinu druge stranice (npr. 9cm) koju označavaju iz točke A, te nakon toga uzimaju veličinu treće stranice (npr. 9 cm) koju također označavaju, ali iz točke B. Tako dobijaju točku (križanjem oznaka šestara) koja označava treći vrh trokuta, npr. C. Nakon rješavanja zadatak im je uočiti da prilikom provjera veličina kutova, nakon ovako nacrtanih trokuta, one moraju biti jednake „manjem“ trokutu. **Završni dio sata (5 min)** Učiteljica se vraća na zadatak s početka sata i postavlja pitanje: *„Što možemo reći za preostala dva lika iz zadatka s početka sata?“, „Koja su to preostala dva lika?“* (Dva pravokutnika.). Učiteljica proziva učenika pred ploču i zadatak mu je usporediti preostala dva lika i provjeriti radi li se zaista o pravokutnicima. Preklapanjem listova dolazi do zaključka da se likovi ne podudaraju. Postavlja pitanja: *„Možemo li reći da su ova dva lika sukladna?“* (Ne.), *„Kako provjeravamo jesu li likovi sukladni?“* (Provjerimo možemo li ih preklopiti u potpunosti.), *„Jesu li likovi slični?“* (Ne.). Navođenjem učiteljice dolaze do zaključka da iako su kutovi u parovima sukladni (po 4 prava kuta), pravokutnici ne izgledaju slično i	Odgovaranje na pitanja. Rješavanje zadataka. Odgovaranje na pitanja.

nisu slični upravo zato što im duljine stranica nisu proporcionalne, u što se možemo uvjeriti i mjerenjem.	

<table>
<tr><th>Plan ploče :</th></tr>
<tr><td>
Slični i sukladni likovi



</td></tr>
</table>

2. Sat

RAZRED: 4. razred

NASTAVNA TEMA/ CJELINA: Talesovo računanje visine piramide

Opći metodički podaci	
Vrsta nastavnog sata:	Sat obrade
Ključni pojmovi:	Sličnost trokuta, proporcionalnost
CILJ NASTAVNOG SATA:	Identificirati slične trokute kod presjeka piramide, upoznati ih s načinom Talesovog mjerenja visine piramide te razumjeti pojam proporcionalnosti
Međupredmetna korelacija:	Priroda i društvo
Unutarpredmetna korelacija:	Kut, Pravi kut, Šiljasti i tupi kutovi, Trokut, Vrste trokuta s obzirom na stranice, Pravokutni trokut
Mediji (nastavna sredstva i nastavna pomagala):	Ploča, kreda, piramida, čovječuljak, lampa, modeli Zemlje i Mjeseca, ppt prezentacija, 2 pravokutna trokuta
Socijalni oblici rada:	Frontalni rad, individualni rad
Nastavne metode:	Metoda razgovora, metoda demonstracije, metoda pisanja, metoda crtanja
OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA: a) temeljna znanja	Učenici će: - uočiti trokute u presjeku piramide - identificirati slične trokute - definirati proporcionalnost veličina - sažeti na koji način je Tales izračunao visinu piramide

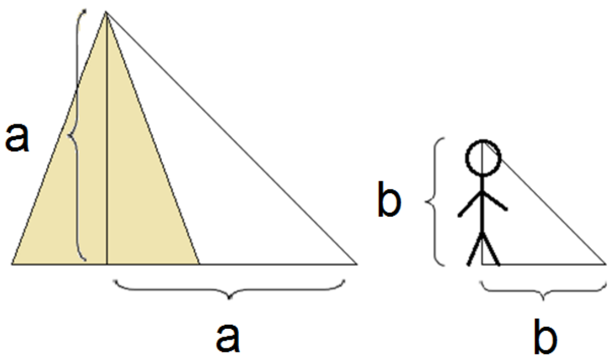
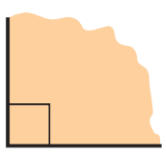
b) vještine i sposobnosti	Učenici će: - primjenjivati stečeno znanje u rješavanju zadataka - razlikovati slične od sukladnih trokuta, i obratno
c) stavovi i vrijednosti	Učenici će: - razvijati sposobnost za samostalni rad, odgovornost, točnost, radne navike i urednost - razvijati kulturu govorenja i slušanja - pridonositi stvaranju poticajnog i ugodnog ozračja u razredu - razvijati socijalne vještine
Korišteni izvori u izradi priprave:	Markovac, J., *Metodika početne nastave matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 2001. Paić, G., Manzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N., *Matematičkim stazama 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

Struktura nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:	Metodičko oblikovanje:	Vrijeme:
Uvodni dio Upoznavanje s pričom o Talesu.	Slušanje, odgovaranje na pitanja.	Frontalni rad.	15 min
Glavni dio Objašnjavanje novog sadržaja.	Odgovaranje na pitanja, rješavanje zadatka.	Frontalni rad, individualni rad.	25 min
Završni dio Informacija za sljedeći sat.	Bilježenje informacija.	Frontalni rad.	5 min

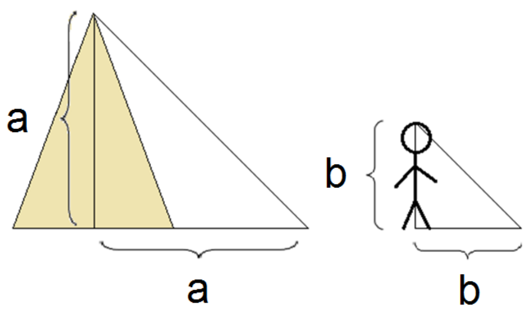
Tijek nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:
Uvodni dio sata (15 min) Učiteljica sat započinje pričom o Talesu, koju prati ppt prezentacija u pozadini: *„Na današnjem ćemo satu pričati o matematičaru pod imenom Tales koji je rođen 620. g. pr. n.e. Što znači da je netko rođen prije nove ere?“* (Prema gregorijanskom kalendaru prije rođenja Isusa Krista.) Učiteljica pojašnjava kako je gregorijanski kalendar kalendar kojeg mi danas koristimo a sastoji se od 12 mjeseci (od siječnja do prosinca), a godina ima ukupno 365 dana dok približno svake četvrte godine ima 366 dana. Započinje rođenjem Isusa Krista. *„Prije koliko je to godina bilo?“* (2018). *„Na koji način ćemo izračunati prije koliko godina je rođen Tales iz Mileta?“* Navođenjem učenika učiteljica rješava zadatak na ploču: $2018 + 620 = 2638.$	Slušanje. Odgovaranje na pitanja. Slušanje i razgovor. Slušanje i odgovaranje na pitanja.

Slijedi nastavak priče uz prikazivanje mjesta na karti prikazanoj na ppt prezentaciji: „*Rođen je u Miletu, što je područje današnjeg grada Balat u Turskoj, gdje se nalaze samo ruševine tadašnjeg grada. Tijekom svog života došao je do mnogih rješenja na neka pitanja koja mnogima nisu bila jasna. Primjerice, utvrdio je ravnodnevnice i predvidio pomrčine Mjeseca. Što je ravnodnevnica?*“. Učiteljica pojašnjava kako je to dan u godini kada noć, dakle vrijeme tame, i dan, vrijeme kada je svjetlo, traju približno jednako. Učiteljica navodi učenike da razmisle o tome koliko dugo tijekom dana traje period svjetla tijekom ljeta, a koliko tijekom zime. Dolaze do zaključka kako je period svjetla tijekom ljeta puno dulji, nego tijekom zime i to čak za nekoliko sati. *„Ako traju približno jednako, koliko je to sati?“* (12 sati.). Imamo proljetnu (20.03.) i jesensku ravnodnevnicu. (23.09.). *„Što je pomrčina Mjeseca?“* (Trenutak kada je Mjesec prekriven sjenom Zemlje, odnosno trenutak kada se Sunce nalazi iza Zemlje te Zemljina sjena pada na Mjesec.). Učiteljica demonstrira rečeno koristeći lampu (što predstavlja Sunce) i modele Zemlje i Mjeseca. Nastavak priče: „*No ono bitno zbog čega ga danas spominjem je upravo zbog toga što je u to vrijeme kada tehnologija nije bila toliko napredna kao ova koju mi imamo danas, izračunao visinu velike Keopsove piramide u Egiptu.*“ Na ppt prezentaciji učiteljica prikazuje gdje se nalazi Egipat i piramide u Gizi te kratko upoznaje učenike s informacijom kako su to grobnice faraona (vladara Egipta). *„Što mislite, je li to bilo teško izračunati, a učinio je to samo uz pomoć užeta i sjene piramide koju je radilo Sunce? Na koji je način to učinio?“*. Rasprava i prijedlozi rješenja	Odgovaranje na pitanja. Slušanje. Odgovaranje na pitanja. Rasprava. Slušanje i odgovaranje na

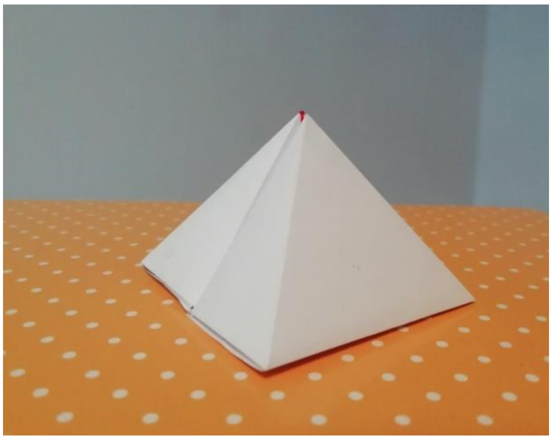
problema. Učiteljica navodi kako je upravo to tema današnjeg sata te kako će znanje koje su savladali na prošlim satima biti potrebno kako bi shvatili na koji je način on to izračunao. **Glavni dio sata (25 min)** Učiteljica nakon toga gasi svjetlo u učionici te navlači zastore kako bi u učionici bilo mračnije. Uzima maketu piramide, lampu, što predstavlja Sunce, te čovječuljka koji predstavlja Talesa. Poziva učenike da se okupe oko stola na kojem se nalaze materijali. Ta tri nastavna pomagala postavlja u takav položaj kako bi demonstrirala način na koji je Tales riješio problem, te pojašnjava: *„Sunčeve zrake koje obasjavaju piramidu i Talesa su paralelne. Pod istim kutom padaju na Zemlju. Pokušajte ih zamisliti kao paralelne linije. Što znači kada kažemo da su linije paralelne?“* (Znači da se nalaze u jednoj ravnini i u niti jednom trenutku se ne sijeku.). Učiteljica prikazuje sliku paralelnih linija Sunčevih zraka na ppt prezentaciji. *„Što je piramida? Je li geometrijski lik ili geometrijsko tijelo?“* (Geometrijsko tijelo). Učiteljica uzima piramidu. *„Koja bi bila najviša točka piramide?“* (Njen vrh.), *„Ako je vrh piramide najviša njena točka, gdje se nalazi mjesto od kojega mjerimo njenu visinu? Vidimo li izvana dio piramide koji želimo izmjeriti?“*. Učiteljica okreće piramidu naopako i pokazuje mjesto od kuda se mjeri. Učenici zaključuju da izvana nije vidljivo ono što želimo izmjeriti. Nakon toga uzima pripremljenu piramidu i dijeli ju na 2 dijela te pokazuje što je visina piramide. *„Upravo je iz tog razloga pred Talesom stajao problem. Nije mogao izmjeriti ono do čega nije mogao doći.“*	pitanja. Praćenje demonstracije. Odgovaranje na pitanja. Slušanje i praćenje demonstracije.

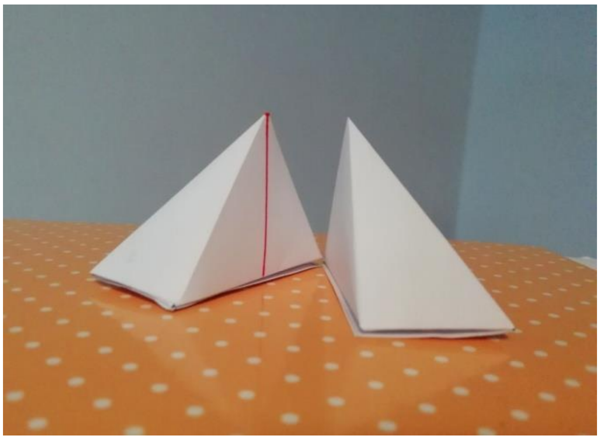
Uzima piramidu, čovječuljka i svjetiljku te uz demonstraciju objašnjava: „*Promatranjem sjene koju čini piramida i sjene koje je stvaralo njegovo tijelo, zaključio je da u trenutku kada duljina njegove sjene koju čini Sunce bude jednaka s njegovom visinom, duljina sjene piramide bit će jednaka visini piramide.*“ Demonstrira to na klupi te nakon toga na ploču crta navedeno.  „*U tom trenutku možemo primijetiti da visina piramide, njena sjena i Sunčeve zrake, odnosno Talesova visina, Njegova sjena i Sunčeve zrake čine trokute. Kakvi su to trokuti?*“ (Pravokutni trokuti.), „*Zašto?*“ (Zato što piramida i Tales okomito stoje na tlu i čine pravi kut.), „*Kako označavamo te kutove?*“, (Označavamo ih s kvadratom kojeg crtamo s unutarnje strane kuta).  „*S obzirom na duljine njihovih stranica, kakve smo trokute dobili?*“ (Jednakokračne.), „*Kakvi su kutovi na ovim trokutima?*“ *(*Dva šiljasta i jedan pravi kut.). Učiteljica uzima 2 izrezana slična jednakokračna pravokutna trokuta te postavlja pitanja: „*Što primjećujete ako*	Slušanje i odgovaranje na pitanja. Odgovaranje na pitanja.

preklopimo trokute u jednom kutu, zatim u drugom te u trećem kutu?" (Da su im kutevi jednaki.). Učiteljica povezuje sadržaj s prošlog sata i postavlja pitanje: *„Ako se dva trokuta podudaraju u sva tri kuta a i znamo da su im stranice proporcionalne, kako takve trokute nazivamo?"* (Nazivamo ih sličnim trokutima.), *„Što znači kada kažemo da su im stranice proporcionalne?"* (To znači da se stranica jednog trokuta povećava ili smanjuje za isto onoliko puta koliko se stranica drugog trokuta poveća ili smanji.), *„Kada biste rekli da su dva trokuta sukladna?"* (Kada bi se trokuti podudarali u obliku i veličini.). **Završni dio sata (5 min)** Na kraju sata im učiteljica navodi kako za sljedeći sat matematike ponesu krojački metar, osim toga jedino što će im trebati je pernica, trokuti i bilježnica iz matematike. Dovoljno je da imaju po jedan krojački metar po klupi kako sjede.	Odgovaranje na pitanja.

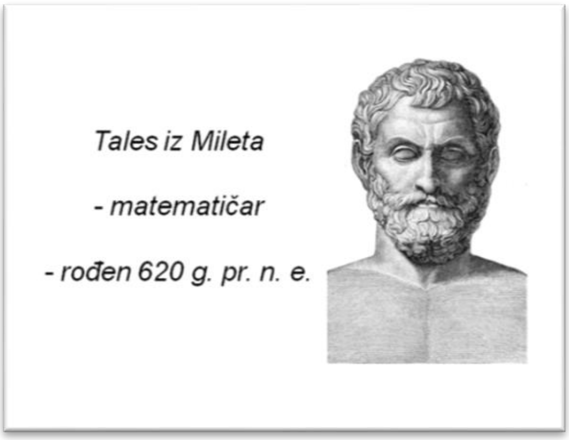
Plan ploče :
$2018 + 620 = 2638$ 

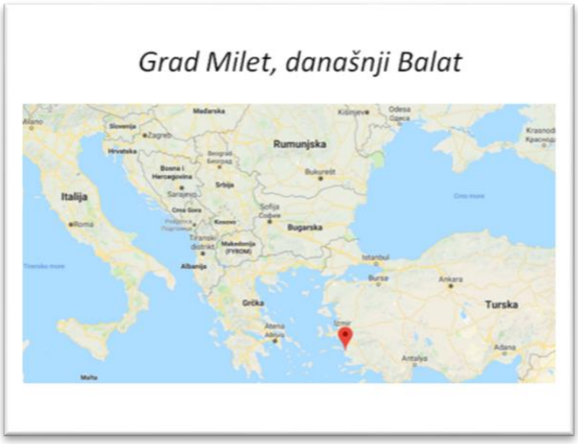
Maketa piramide:

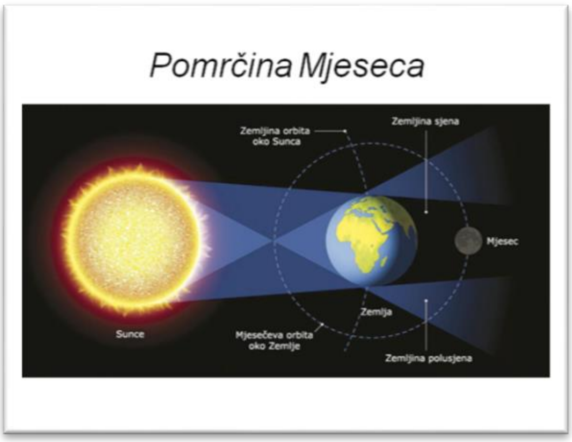


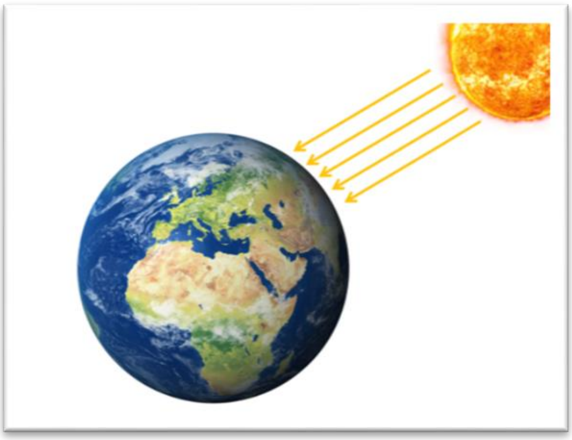


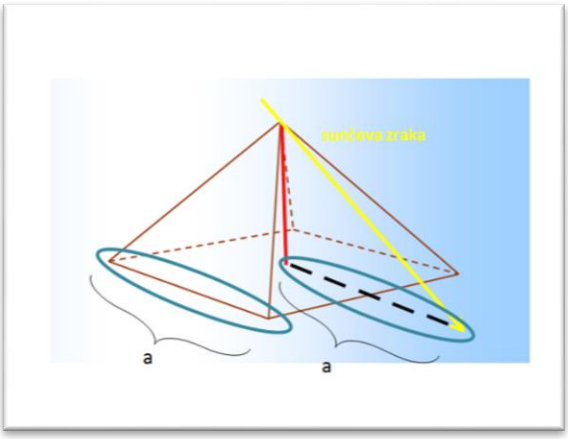
Powerpoint prezentacija:










sunčeva zraka
a
a

3. Sat

RAZRED: 4. razred

NASTAVNA TEMA/ CJELINA: Talesovo računanje visine piramide

Opći metodički podaci	
Vrsta nastavnog sata:	Sat ponavljanja (Terenska nastava)
Ključni pojmovi:	Sličnost i sukladnost trokuta, proporcionalnost
CILJ NASTAVNOG SATA:	Koristiti znanje o sličnim i sukladnim trokutima u praktičnim zadacima
Međupredmetna korelacija:	Priroda i društvo
Unutarpredmetna korelacija:	Kut, Pravi kut, Trokut, Pravokutni trokut, Pretvaranje mjernih jedinica
Mediji (nastavna sredstva i nastavna pomagala):	Krojački metar, trokuti za crtanje
Socijalni oblici rada:	Frontalni rad, individualni rad, rad u paru
Nastavne metode:	Metoda razgovora, metoda crtanja
OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA: a) temeljna znanja b) vještine i sposobnosti	 Učenici će: - prepoznati slične i sukladne trokute - definirati sličnost i sukladnost trokuta te proporcionalnost veličina - usporediti i razlikovati slične i sukladne trokute Učenici će: - prepoznati slične i sukladne trokute

	- razlikovati slične u sukladne trokute - primjenjivati stečeno znanje u rješavanju zadataka
c) stavovi i vrijednosti	Učenici će: - razvijati sposobnost za rad u paru - razvijati kulturu govorenja i slušanja - pridonositi stvaranju poticajnog i ugodnog ozračja u razredu - razvijati socijalne vještine
Korišteni izvori u izradi priprave:	Markovac, J., *Metodika početne nastave matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 2001. Paić, G., Mnzoni, Ž., Marjanović, I., Kosak, N., *Matematičkim stazama 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2013.

Struktura nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:	Metodičko oblikovanje:	Vrijeme:
Uvodni dio Odlazak u dvorište	Slušanje, odgovaranje na pitanja.	Frontalni rad	10 min
Glavni dio	Odgovaranje na pitanja, rješavanje zadatka.	Frontalni rad, rad u paru	30 min
Završni dio Domaća zadaća	Ponavljanje, provjera zadataka.	Frontalni rad, individualan rad	5 min

Tijek nastavne djelatnosti:	Aktivnosti učenika:
Uvodni dio sata (10 min) Na početku sata učiteljica napominje učenicima kako će današnji sat provesti u dvorištu škole. Učenici sa sobom uzimaju pernicu, bilježnicu, trokute i krojački metar koji su trebali pripremiti za današnji sat. Dolaskom u dvorište učiteljica postavlja pitanja: *„Koju smo temu obrađivali na prošla dva sata?“, „O čemu smo razgovarali?“* (O sličnosti i sukladnosti likova i specifično trokuta.), *„Što znači kada kažemo da su trokuti sukladni?“* (Da se podudaraju oblikom i veličinom.), *„A što znači kada kažemo da su trokuti slični?“* (Da se podudaraju u 3 kuta, te da su im stranice proporcionalne.), *„Što znači kada kažemo da su likovima stranice proporcionalne?“* (To znači da se stranica jednog trokuta povećava ili smanjuje za isto onoliko puta koliko se stranica drugog trokuta poveća ili smanji.), *„Koji je veliki matematičar, upravo uz pomoć sličnosti trokuta uspio riješiti veliki problem?“* (Tales.), *„Gdje je*	Odgovaranje na pitanja.

Tales rođen?“ (U Miletu, današnjem gradu Balat u Turskoj.), *„Koji je to veliki problem riješio?“* (Izračunao je visinu Keopsove piramide u Egiptu.), *„Na koji je način to učinio?“, „Kakve je trokute koristio prilikom izračuna?“* (Pravokutne trokute.), *„Uz pomoć čega je izmjerio visinu piramide?“* (Samo uz pomoć užeta i sjene koje je radilo Sunce.) Učiteljica učenike dijeli u parove i navodi: „Današnji vam je zadatak da u parovima izmjerite visinu onoga s kojim ste u paru i duljinu njegove sjene. Mjerna jedinica neka bude metar. Nakon toga u dvorištu izaberite još jedan predmet kojemu će izmjeriti isto to.“ **Glavni dio sata (30 min)** Učiteljica im daje 15 minuta vremena da odrade zadatak. Nakon toga se okupljaju i sjedaju na klupe ili tlo tako da mogu bilježnicu postaviti na ravnu podlogu kako bi mogli crtati s trokutima. Učiteljica zadaje zadatak: *„Nacrtajte trokute tako da im je jedna stranica vaša visina, druga stranica duljina vaše sjene, te treću stranicu izmjerite i zapišite kolika je. Kakvi će to biti trokuti?“* (Pravokutni trokuti.), *„Zašto baš pravokutni?“* (Zbog toga što visinu onoga što mjerimo, mjerimo okomito od tla.). Dalje učiteljica pojašnjava kako su njihove bilježnice puno manje od njihovih stvarnih visina i ne možemo doslovno nacrtati točno onoliko koliko ste visoki, te da ćemo malo prilagoditi veličine. Navodi da umjesto centimetra mjernu jedinicu zamijene u milimetar, odnosno ako je netko visok 165 centimetara neka to bude 165 milimetara (1 decimetar, 6 centimetara i 5 milimetara). Učenicima daje vremena da nacrtaju i označe trokute te	 Rješavanje zadatka. Odgovaranje na pitanja.

obilazi učenike i daje im savjete ukoliko je potrebno. Završetkom zadatka vraćaju se u učionicu. **Završni dio sata (5 min)** Nakon dolaska u razred i smještanja u klupe, učiteljica postavlja pitanja: *„Što možemo reći za sve vaše nacrtane trokute?“* (Da su oni svi slični.), *„Zbog čega je to tako?“*, (Zbog toga što su svi nacrtani trokuti, pravokutni trokuti i s obzirom na to da su zrake Sunca paralelne preostala su im dva kuta također jednaka. No veličinom se trokuti razlikuju.). Navodi učenicima da prošetaju razredom i potraže postoji li u učionici nacrtanih sukladnih trokuta, odnosno postoji li netko tko je jednako visok kao prijatelj iz razreda ili je više učenika mjerilo visinu istog predmeta. Usputno postavlja pitanje: *„Što znači kada kažemo da su trokuti sukladni?“* (To znači da se podudaraju veličinom i oblikom.) Za domaću zadaću učenicima je zadatak usporediti nacrtane trokute i reći za koliko su puta međusobno veći, odnosno manji.	 Zaključivanje. Odgovaranje na pitanja. Uspoređivanje zadataka.

6. Zaključak

Temu *Sličnost trokuta*, koja je po Nastavnom planu i programu te mogućnostima učenika predviđena za sedmi razred osnovne škole, moguće je provesti u četvrtom razredu osnovne škole obraćajući pažnju na to da tema bude prilagođena uzrastu. Bitno je da je učenicima na konkretnim primjerima pojašnjeno i definirano što je to sličnost trokuta, te na koji ih način prepoznajemo. Također učenicima je potrebno dati zadatke tijekom kojih dolazi do individualnog napredovanja. Ova bi tema mogla biti obrađena s odabranim učenicima, onim zainteresiranima ili s grupom darovitih učenika. Također postoji mogućnost provedbe teme s učenicima na posljednjim satima školske godine, na satima koji su predviđeni za rješavanje ispita od strane učenika koji nisu bili u mogućnosti prisustvovati ispitu u za njega predviđeno vrijeme.

Ova je tema vrlo pogodna za izvođenje projektnog oblika nastave. Kroz nju se ostvaruje discipliniranost, odnosno anticipiraju se i integriraju sadržaji iz drugih predmeta, primjerice priroda i društvo, odnosno kasnije povijest i geografija. Na takav način povezuju se informacije vezane iz nekoliko područja shvaćanja i suradnja većeg obujma učenika kojima se razvija potreba za surađivanjem i aktivnim sudjelovanjem u nastavi.

Upoznavanje učenika sa sličnošću trokuta treba biti popraćeno njihovim upoznavanjem Talesovog rada i načina izračunavanja visine piramide. Na zanimljiv način ispričati kratku povijest vezanu za Talesa, čime se još bavio u životu i što je on pridonio društvu svojim radom. S obzirom na korištenje vrlo jednostavnih instrumenata učenicima je bitno predočiti konkretan način mjerenja visine piramide uz pomoć modela Sunca i piramide u Gizi. Na takav način učitelj dobiva veliku pažnju učenika te iskoristiti tu priliku za kvalitetno približavanje teme učenicima. Također, nakon prikazivanja modela rješavanja problema, bitno je učenike uključiti u rad. Učenicima je prilikom obrade ovakvih tema najbolje postaviti u realnu situaciju. Obrada teme na opisani način, kroz rad u paru i rad u grupi, te izvanučioničku nastavu, uz pozivanje na aktivno sudjelovanje u nastavi i promišljanje, potiče na suradničke oblike učenja i stvara pozitivno ozračje među učenicima.

7. Literatura:

1. Aristotel (1988.) *Metafizika*. Zagreb: Globus
2. Cindrić, D. (2014.) *Euklid i prva knjiga Elemenata*. Diplomski rad. Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
3. Cindrić, M., Vlasnović, H. (2014.) *Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hieleovoj teoriji.* [Online] 63, 1-2. str. 37-51. Dostupno na: https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=182036 [Pristupljeno 6. lipnja 2018.]
4. Čekrlija, B. (2000.) *Vremeplovom kroz matematiku.* Laktaši: Grafomark [Online] Dostupno na: http://www.antonija-horvatek.from.hr/povijest-matematike/Vremeplovom-kroz-matematiku-Boris-Cekrlija.pdf [Pristupljeno: 21. ožujka 2018.]
5. Dadić, Ž. (1992.) *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*. Zagreb: Školska knjiga.
6. Euklid (1999.) *Elementi I – VI.* Zagreb: Kruzak
7. Ilišević, B., Bombardelli, M. (2007.) *Elementarna geometrija.* [Online] Skripta. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf [Pristupljeno: 21. ožujka 2018.]
8. Jankov, D., Papić, I. (2012.) *Tri klasična problema*. Osječki matematički list, 12(1), 11-19. [Online] Dostupno na: https://hrcak.srce.hr/87337 [Pristupljeno: 9. studenog 2017.]
9. Janjanin, B., Beban-Brkić (2017.) *Analiza izmjere Keopsove piramide*. Stručni rad. Zagreb: Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
10. Khalaf, S., G., *Thales of Miletus* [online]. Phoenician Encyclopedia. Dostupno na: https://phoenicia.org/thales.html [Pristupljeno: 30. siječnja 2018.]
11. Kralj, T. (2014.) *Talesovi teoremi*. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno matematički fakultet. Dostupno na: digre.pmf.unizg.hr/3988/1/Talesovi%20teoremi_Tanja%20Kralj.pdf
12. Laertije, D. (2008.) *Životi i misli istaknutih filozofa.* Zagreb: Nova Akropola.
13. Legendre, A.,M. (2010.) *Elementi geometrije*. Zagreb: Element.
14. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2010.) *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko*

obrazovanje. [Online] Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Dostupno na: http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf [Pristupljeno: 6.lipnja 2018.]

15. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (2006.) *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. [Online] Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Dostupno na: https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf [Pristupljeno: 2. ožujka 2018.]
16. Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2017.) *Okvir nacionalnog kurikuluma, Prijedlog nakon javne rasprave.* [Online] Zagreb: Ministarstvo znanosti i obrazovanja. Dostupno na: https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2017/OBRAZOVANJE/NACION-KURIK/okvir_nacionalnoga_kurikuluma.pdf [Pristupljeno: 4. siječnja 2019.]
17. Merzbach, U., C., Boyer, C., B. (2011.) A History of Mathematics.
18. O'Grady, P., *The internet Encyclopedia of Philosophy: Thales of Miletus (c. 620 B.C.E. – c. 546 B.C.E.)* [online]. The Flinders University of South Australia: Internet Encyclopedia of Philosophy. Dostupno na: http://www.iep.utm.edu/thales/ [Pristupljeno: 24. siječnja 2018.]
19. Palman, D. (1994.) *Trokut i kružnica*. Zagreb: Element
20. Piaget, J., Bärbel, I. (1986.) *Intelektualni razvoj djeteta: izabrani radovi*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

8. Sažetak

U ovom radu prikazan je način provedbe teme *Sličnosti trokuta* u četvrtom razredu osnovne škole. Kroz dva sata razrade i jedan sat praktičnog rada izvan učionice, prikazano je na koji se način tema može prilagoditi učenicima mlađeg uzrasta. Iako je na prvi pogled tema zahtjevna, davanjem zadataka i uključivanje učenika u konkretnu situaciju moguće je učenicima približiti odabrano gradivo. Ovim radom ispitana je prilagođenost teme sličnosti trokuta četvrtom razredu osnovne škole, s obzirom na zrelost učenika te *Nastavni plan i program*.

Na početku rada je dotaknuta povijest matematike te općenito razvoj geomatrije kroz povijest. Detaljno su prikazani dokazi Talesovog teorema o proporcionalnosti i dokazi o sličnosti trokuta, te općenit utjecaj Talesa na matematiku. Također, opisana je prilagođenost matematike, te konkretno tema *Sličnost trokuta* u Nastavnom planu i programu za učenike u osnovnoj školi.

Također, ova je tema izvrsna za izvođenje projektnog oblika nastave kroz koju bi učenici ostvarili svoju discipliniranost i integraciju sadržaja iz drugih predmeta kao što su priroda i društvo, a kasnije i povijest i geografija. Na taj način potiče se na međusobnu suradnju i povezivanje sadržaja s drugim predmetima.

Ključne riječi: Tales, sličnost trokuta, prilagodba tema

9. Summary

In this thesis is shown how the topic *Similarity of triangles* could be conducted in fourth grade. Even though the topic is provided for older children in primary school, through two elaboration lessons and one practical lesson out of classroom, in this thesis is shown how it could be done. Although the topic is demanding on first sight, adjusting the topic for younger pupils, giving them tasks and by putting pupils in specific situation, it's possible to bring them the topic closer.

Breafly, in thesis is shortly written a history of mathematics and generally development of geometrics throughout history. The evidence of Thales teorem of proportionality and similiraty of triangles is described in detail, and also the general influence of Thales on mathematics. Also, it is shown how the topic is adjusted in the curriculum for primary school.

Also this topic is excellent for teaching through project in which pupils achieve discipline and integration of contents from other subjects such as Science, and later History and Geography. In this way pupils are encouraged to be involved in mutual cooperation and connecting contents with other subjects.

Key words: Tales, similarity of triangles, topic adjustment