Primjena matričnog računa u rješavanju sustava linearnih jednadžbi

Zulić, Denis

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet Informatike

DENIS ZULIĆ

PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNA U RJEŠAVANJU SUSTAVA LINEARNIH JEDNADŽBI

Završni rad

Pula, rujan, 2020. godine

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet Informatike

DENIS ZULIĆ

PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNA U RJEŠAVANJU SUSTAVA LINEARNIH JEDNADŽBI

Završni rad

JMBAG: 0303076218, redoviti student

Studijski smjer: INFORMATIKA

Kolegij: MATEMATIKA ZA INFORMATIČARE I

Mentor: izv. prof. dr. sc. DANIJELA RABAR

Pula, rujan, 2020. godine

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani Denis Zulić, kandidat za prvostupnika Informatike ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

____

U Puli, rujan, 2020. godine

IZJAVA

o korištenju autorskog djela

Ja, Denis Zulić dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj završni rad pod nazivom *Primjena matričnog računa u rješavanju sustava linearnih jednadžbi* koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

Potpis

____

U Puli, rujan, 2020. godine

Sadržaj

1. UVOD 1
2. MATRICE 2
2.1. Definicija 2
2.2. Simetrična matrica 4
2.3. Antisimetrična matrica 4
2.4. Dijagonalna matrica 5
2.5. Jedinična matrica 5
2.6. Nul-matrica 6
2.7. Trokutasta matrica 6
2.8. Vektor redak 8
2.9. Vektor stupac 8
2.10. Transponirana matrica 10
2.11. Računske operacije s matricama 11
2.11.1. Zbrajanje matrica 11
2.11.2. Oduzimanje matrica 12
2.11.3. Množenje matrice skalarom (brojem) 13
2.11.4. Množenje matrica 14
3. DETERMINANTE 17
3.1. Općenito o determinanti 17
3.2. Determinante prvog reda 17
3.3. Determinante drugog reda 17
3.4. Determinante trećeg reda 18
3.5. Determinante četvrtog i višeg reda 20
3.6. Svojstva determinanti 21
4. INVERZNA MATRICA 21
4.1. Računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom 22
4.2. Računanje inverzne matrice Gauss-Jordanovom metodom 26
4.3. Primjena inverzne matrice 28
5. ELEMENTARNE MATRICE 29
6. LINEARNA ZAVISNOST I NEZAVISNOST VEKTORA 32
7. RANG MATRICE 33
8. SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI 35

8.1. Gaussova i Gauss-Jordanova metoda eliminacije 35
8.2. Homogeni i nehomogeni sustavi linearnih jednadžbi 40
8.3. Cramerovo pravilo 43
9. PRIMJENA MATRICA U SUSTAVIMA LINEARNIH JEDNADŽBI 45
Zadatak 1 45
Zadatak 2 46
Zadatak 3 48
Zadatak 4 50
Zadatak 5 51
10. PRIMJENA MATRICA U WEB APLIKACIJI 52
10.1. Matrix Reshish 52
10.1.1. Gauss-Jordanova metoda eliminacije 54
10.1.2. Cramerovo pravilo 58
10.2. OnlineMSchool 61
10.2.1. Gauss-Jordanova metoda eliminacije 62
11. ZAKLJUČAK 65
LITERATURA 66

1. UVOD

Ovaj rad prikazat će kako se koriste matrice u linearnim jednadžbama pa sve do razrade teme i ulaženja u problematiku iste kroz primjere rješavanja zadataka iz svakodnevnog života.

Najprije će biti govora općenito o matrici gdje se govori o vrstama matrica kakve postoje, a to su: simetrična, antisimetrična, dijagonalna, jedinična, nul-matrica i trokutasta matrica. Nakon toga prikazat će se neke najosnovnije operacije za matrice kao što su zbrajanje, oduzimanje, množenje matrica te transponiranje i množenje matrice brojem.

U trećem dijelu će se prikazati kako funkcioniraju determinante gdje će biti govora o nekim njihovim općenitim značajkama. Prikazat će se primjeri determinante trećeg i četvrtog reda. Pomoću Laplaceovog razvoja računat će se determinante četvrtog i višeg reda, a determinante trećeg reda će se računati pomoću Sarussovog pravila. Ukratko će biti govora o općim svojstvima determinanti koja se mogu uočiti.

Nakon determinante slijedi inverz, rang te elementarne transformacije. Kod inverza matrice prikazat će se dva načina izračuna inverza. Jedan od tih načina je prema Gauss-Jordanovoj metodi te je prikazan konkretni primjer koji može poslužiti u stvarnom životu. Drugi način je računanje inverza pomoću Cramerove metode. Da bi shvatili kako se računa inverz matrice pomoću Cramerove metode, potrebno je znati kako funkcioniraju adjungirane matrice. Elementarne transformacije su poprilično jednostavne, a nakon toga slijedi rang matrice.

Zatim se prelazi na linearne sustave jednadžbi. U linearnim sustavima prikazat će se kako funkcionira Gaussova eliminicija i Gauss-Jordanova eliminacija. Potom će se nešto spomenuti o homogenim i nehomogenim sustavima, te će se nakon toga prikazati Cramerovo pravilo.

Prikazat će se konkretni primjeri koji se mogu dogoditi u stvarnom svijetu. Najčešće se rješava pomoću Gaussove, Gauss-Jordanove eliminacije, pa i Cramerovim pravilom. Također bit će i jedan primjer inverzne matrice koji će se riješiti Gauss-Jordanovom metodom.

I, kao posljednje prikazuje se aplikacija Matrix Reshish kako funkcionira. Matrix Reshish je odlična aplikacija ako želimo naučiti kako računati pomoću matrica jer ispisuje svaki potrebni korak. Aplikacija je poprilično brza i dozvoljava da format matrice bude i do 100×100.

2. MATRICE

2.1. Definicija

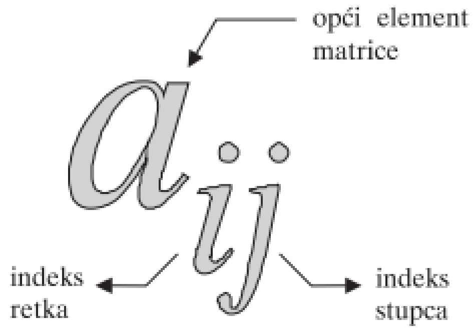
„Matrica je pravokutna tablica sačinjena od nekoliko redaka i stupaca ispunjenih njezinim elementima. Ti su elementi obično brojevi, najčešće realni, no ponekad i kompleksni. Elementi mogu biti i drugi objekti, poput funkcija, vektora, diferencijalnih operatora, pa čak i samih matrica." (Elezović, 2006., str. 1). Za bilo koju matricu koja ima m redaka i n stupaca kažemo da je formata $m \times n$. Matrice također olakšavaju prezentaciju brojeva. Primjer toga može biti Excel jer u njemu se svaki broj unosi posebno u svaku ćeliju.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Opći oblik matrice

„Elementi matrice su brojevi indeksirani s dva indeksa. Prvi označava broj retka, a drugi broj stupca u kojem se dotični element nalazi." (Elezović, 2006., str. 2)

Slika 1. Zapis općeg elementa matrice



Izvor: ELEZOVIĆ, 2006., Str. 2

Primjer 1:

Matrice različitih formata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 1 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$$

Ako broj redaka i broj stupaca nisu jednaki tada se matrica naziva pravokutna matrica, u slučaju da je jednak broj redaka i stupaca tada se matrica naziva kvadratna matrica. Matrica A iz prethodnog primjera je reda 2, a matrica B je formata (3,2).

Iz prethodnog primjera, a_{22} ima vrijednost 2 dok b_{22} ima vrijednost 1. Logično je da se može vidjeti da te dvije matrice nisu jednake. Da bi bile jednake, trebaju imati isti format tj. „isti broj redaka i isti broj stupaca“ (Hari, 2005., str. 127) i moraju imati iste elemente na odgovarajućim mjestima.

Može se reći da je matrica A kvadratna matrica zato jer ima isti broj redaka (m) i broj stupaca $(n), tj. m = 2\ i\ n = 2$. Također valja napomenuti da kod kvadratnih matrica, u slučaju kada zamijenimo retke sa stupcima i obrnuto, vrijednosti u dijagonali matrice se ne mijenjaju.

Postoje razni tipovi matrica, a to su: simetrične, antisimetrične, vektor matrica, gornjetrokutasta i donjetrokutasta matrica, nul-matrica, dijagonalna i jedinična matrica itd. Za svaki tip matrice bit će prikazan primjer i detaljno objašnjen kako funkcionira.

Također, objasnit će se i transponirane matrice detaljno.

2.2. Simetrična matrica

„Simetrična matrica je kvadratna matrica kod koje su elementi matrice, simetrično raspoređeni s obzirom na glavnu dijagonalu, jednaki.“ (Radišić, 2012., str. 5). Može se reći da su 'zrcalno' raspoređeni. Za simetrične matrice vrijedi da je „$a_{ij} = a_{ji}$“ (Elezović, 2006., str. 5). To bi značilo da npr. a_{31} ima istu vrijednost kao i a_{13}. Bilo koja simetrična matrica mora zadovoljavati uvjet da bude kvadratna.

Primjer 2:

Kvadratna matrica

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 22 \\ 9 & 22 & 13 \end{bmatrix}$$

Iz ovog primjera se može vidjeti da a_{12} ima istu vrijednost kao i a_{21}, pa tako isto vrijedi i a_{13}=a_{31} te a_{23}=a_{32}. Ova matrica je također kvadratna jer ima isti broj redaka i stupaca.

2.3. Antisimetrična matrica

Antisimetrična matrica slično funkcionira kao i simetrična matrica. Glavna razlika između simetrične i antisimetrične je ta što za simetričnu vrijedi da je $a_{ij} = a_{ji}$, a za antisimetričnu matricu je „$a_{ij} = -a_{ji}$“ (Elezović, 2006., str. 5). Dodatni uvjet za antisimetričnu matricu je da sve vrijednosti na dijagonali moraju biti jednake nuli. Bilo koja antisimetrična matrica mora zadovoljavati uvjet da bude kvadratna.

Primjer 3:

Antisimetrična matrica

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -5 & 0 & 22 \\ -9 & -22 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4. Dijagonalna matrica

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica sa svim nedijagonalnim elementima koji su jednaki nuli, tj. za koje vrijedi $a_{ij} = 0$, za $i \neq j$.

Primjer 4:

Dijagonalna matrica

$$D = \begin{bmatrix} 89 & 0 & 0 \\ 0 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

2.5. Jedinična matrica

Jedinična matrica je kvadratna matrica koja ima isti broj redaka i stupaca. U jediničnoj matrici na dijagonali moraju biti samo jedinice. Svi elementi koji se nalaze izvan dijagonale jednaki su nuli. Obično se označava sa I. Pravilo: „$a_{ij} = 1\ za\ i = j, a_{ij} = 0$ za $i \neq j$“ (Radišić, 2012., str. 6).

Primjer 5:

Jedinična matrica trećeg reda

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6. Nul-matrica

Svi elementi u matrici iznose nula. Nul-matrica može biti bilo kojeg formata.

Primjer 6:

Nul-matrica

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7. Trokutasta matrica

Postoje dvije vrste trokutastih matrica, a to su: gornjetrokutasta i donjetrokutasta matrica. Trokutaste matrice moraju biti kvadratne.

Gornjetrokutasta matrica

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi ispod dijagonale jednaki nuli. Za nju vrijedi: „$a_{ij} = 0 \ za \ i > j$“ (Radišić, 2012., str. 8).

Primjer 7:

Gornjetrokutasta matrica

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Donjetrokutasta matrica

Iznad dijagonale svi elementi su jednaki nuli. Pravilo: „$a_{ij} = 0 \; za \; j > i$“ (Radišić, 2012., str. 8).

Primjer 8:

Donjetrokutasta matrica

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.8. Vektor redak

„Matrica koja ima samo jedan redak“ (Radišić, 2012., str. 9). Također vektor redak se može nazivati jednoredna matrica.

Primjer 9:

Vektor redak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ova matrica je formata 1×3.

2.9. Vektor stupac

„Matrica koja ima samo jedan stupac“ (Radišić, 2012., str. 9). Također vektor stupac se može nazivati jednostupčana matrica.

Primjer 10:

Vektor stupac

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ova matrica je formata 3×1.

Ako imamo vektor stupac A, onda njegov transponirani vektor A^T je vektor redak i obrnuto.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}^T = [1,2,3] \qquad [1,2,3]^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Kao što je već napomenuto prije, opći oblik matrice izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Iz toga je logično pretpostaviti da se matrica sastoji od vektor-redaka

$$A_1 = [a_{11} \ldots\ a_{1n}]$$

$$\vdots$$

$$A_m = [a_{m1} \ldots a_{mn}]$$

odnosno od vektor stupaca

$$A^1 = \begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}.$$

I to se može napisati na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix} \text{ ili } A = [a^1 \ldots\ a^n].$$

2.10. Transponirana matrica

Transponiranu matricu A dobijemo tako da zamijenimo redak stupcem te naj taj način svaki redak postaje stupac i obrnuto. Transponirana matrica se označava sa A^T.

Znači, prema pravilu vrijedi: ako je matrica formata „$m \times n$ onda transponirana matrica treba biti formata $n \times m$.“ (Radišić, 2012., str. 10).

Primjer 11:

Transponirana matrica

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 69 & 3 \\ 11 & 55 \\ 22 & 44 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 69 & 11 & 22 \\ 3 & 55 & 44 \end{bmatrix}$$

Primjer 12:

Kvadratna matrica

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

U ovom primjeru se vidi da vrijednosti elemenata u matrici ostaju iste ako se radi transponiranje matrice. To je zbog toga jer je matrica simetrična. Naravno i vrijednosti u dijagonali su zadržale istu vrijednost.

2.11. Računske operacije s matricama

Postoji više vrsta operacija s matricama, a to su:

1. zbrajanje matrica,
2. oduzimanje matrica,
3. množenje matrice skalarom,
4. množenje matrica.

U nastavku će se prikazati primjeri gdje će se posebno naglasiti na što treba točno paziti kod računanja.

2.11.1. Zbrajanje matrica

Zbrajanje matrica je moguće samo ako su one istog formata. Ako su matrice istog formata onda se zbrajaju elementi na odgovarajućim mjestima.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Primjer 13:

Zbrajanje matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 75 \\ 65 & 35 \\ 58 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 78 \\ 69 & 41 \\ 61 & 7 \end{bmatrix}$$

Kao što je već prije napomenuto da nije moguće zbrojiti matrice ako one nisu istog formata.

$$\begin{bmatrix} 2 & 75 \\ 65 & 35 \\ 58 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow NEDEFINIRANO!$$

„Neutralni element kod zbrajanja matrica je nul-matrica:

$$A + 0 = A = 0 + A.$$

Zbrajanje matrica je asocijativno ($(A + B) + C = A + (B + C)$) i komutativno ($A + B = B + A$).

Ako je λ neki skalar (broj), a $A = (a_{ij})$ matrica, tada je $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ njihov skalarni umnožak dobiven množenjem svakog elementa matrice A skalarom λ. Kao specijalni slučaj možemo definirati negativnu matricu $-A$, tako da matricu $A = (a_{ij})$ pomnožimo skalarom −1. Slijedi:

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A$$

Ovo nam omogućuje da definiramo oduzimanje matrice kao pribrajanje negativne matrice: $A - B = A + (-B)$." (Nikšić, 2003., str. 12).

2.11.2. Oduzimanje matrica

Pravila kod oduzimanja matrica su ista kao kod zbrajanja. Matrice moraju biti istog tipa i od svakog elementa sa određenim indeksom iz jedne matrice se oduzima element iz druge matrice s istim indeksom.

Primjer 14:

Oduzimanje matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 75 \\ 65 & 35 \\ 58 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 72 \\ 61 & 29 \\ 55 & -3 \end{bmatrix}$$

2.11.3. Množenje matrice skalarom (brojem)

Množenje matrice skalarom predstavlja množenje realnog broja sa svakim elementom matrice. Skalar se označava s λ.

Ako imamo dvije matrice koje su realne, tada množenje matrice skalarom ima sljedeća svojstva (Ilišević, 2014., str. 3):

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributivnost u odnosu na zbrajanje matrica)
2. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$ (distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara)
3. $(\lambda * \mu) \cdot A = \lambda(\mu A)$ (kvaziasocijativnost)

$\lambda\ i$ μ predstavljaju realne brojeve.

Primjer 15:

Množenje matrice skalarom

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Primjer 16:

Množenje matrice skalarom

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2A = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2} \cdot 4 & \frac{1}{2} \cdot 6 \\ \frac{1}{2} \cdot 8 & \frac{1}{2} \cdot 12 & \frac{1}{2} \cdot 14 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2.11.4. Množenje matrica

Množenje matrica je složenije od zbrajanja i oduzimanja matrica. „Da bi postojao umnožak dviju matrica, one moraju biti ulančane: broj stupaca prve mora biti jednak broju redaka druge matrice. (Odnosno, „duljina“ retka prve mora biti jednaka „duljini“ stupca druge matrice.) Tako, ako je A tipa (m, n), da bi umnožak $A \cdot B$ postojao, matrica B mora biti tipa (n, p). Pri tom m i p mogu biti bilo kakvi. Rezultat množenja bit će ponovno matrica, tipa (m, p).

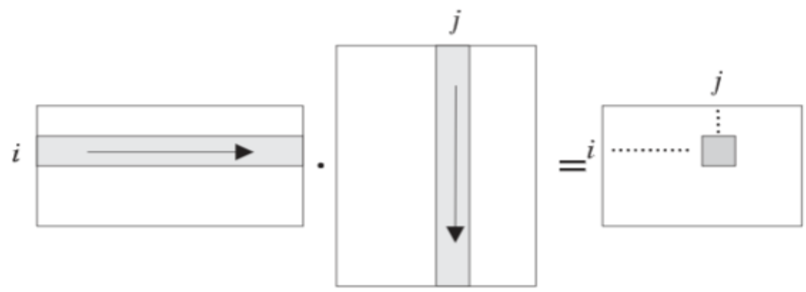
Kako množimo matrice? Neka je $A = (a_{ij})$ tipa (m, n), $B = (b_{ij})$ tipa (n, p). Opći element umnoška AB dan je formulom

$$(AB)_{ij} \coloneqq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Ovaj umnožak prepoznajemo kao umnožak i-toga retka matrice A i j-tog stupca matrice B:

$$(AB)_{ij} = [a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Slika 2. Množenje matrice



Izvor: Elezović, 2006., str. 9

Dvije matrice mogu se množiti samo ako su ulančane. Rezultat je matrica koja ima jednak broj redaka kao prva i jednak broj stupaca kao i druga matrica. Element umnoška na mjestu (i, j) jednak je skalarnom umnošku i-toga retka prve i j-toga stupca druge matrice.“ (Elezović, 2006., str. 8)

Primjer 17:

Množenje matrica različitog formata

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 + 14 + 15 & 8 + 12 + 12 \\ 36 + 35 + 30 & 32 + 30 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 32 \\ 101 & 86 \end{bmatrix}$$

Prva matrica formata 2×3 se množi sa drugom matricom formata 3×2.

Primjer 18:

Množenje matrica različitog formata

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 & -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 & -2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & -7 \\ 7 & 0 & 7 \\ 2 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

U ovom primjeru konačni rezultat je matrica formata 3×3, jer konačna matrica ima redova koliko i prva matrica i stupaca koliko i druga matrica.

Sljedeći primjer će prikazivati zadatak iz prakse.

Primjer 19:

Ljekarna prodaje tri neophodne stvari u borbi protiv virusa, a to su: sredstvo za dezinfekciju, jednokratne maske i jednokratne rukavice. Zadatak je otkriti koliko iznosi prihod svaki dan u tjednu.

- Sredstvo za dezinfekciju – 30 kn
- Jednokratne maske – 20 kn
- Jednokratne rukavice – 25 kn

Broj prodanih komada iznosi:

	PON	UTO	SRI	ČET	PET	SUB	NED
s.z.d	10	12	15	7	18	3	4
j.m.	20	30	25	15	17	6	9
j.r.	3	5	2	7	8	4	3

Prihod od jednog dana (pon) se računa na sljedeći način:

$$30 \cdot 10 + 20 \cdot 20 + 25 \cdot 3 = 775$$

Kada se svi podaci uvrste u matricu izgledaju ovako:

$$[30 \quad 20 \quad 25] \cdot \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 & 7 & 18 & 3 & 4 \\ 20 & 30 & 25 & 15 & 17 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= [775 \;\; 1085 \;\; 1000 \;\; 685 \;\; 1080 \;\; 310 \;\; 375]$$

Iz rezultata se može vidjeti da za ponedjeljak prihod je 775, za utorak 1085 itd.

3. DETERMINANTE

3.1. Općenito o determinanti

Svakoj kvadratnoj matrici se može pridružiti skalar koji se naziva determinanta. Determinanta se označava sa det ili znakom | |.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Opći oblik determinante

Npr. simbol determinante matrice A se označava s $|A|$.

Determinanta govori o matrici i korisna je u sustavima linearnih jednadžbi, pomaže u pronalaženju inverzne matrice itd.

3.2. Determinante prvog reda

„Determinanta matrice $A = [a]$ je broj a." (Klobučar, 2013., str. 1)

3.3. Determinante drugog reda

„Determinantom matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ zovemo broj $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$." (Klobučar, 2013., str. 1)

Primjer 20:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadana je matrica formata 2×2. Njena determinanta je:

$$1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Znači, formula za determinantu matrice formata 2×2 je „$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$“ (Klobučar, 2013., str. 1) (unakrsno množenje). a_{11} predstavlja vrijednost 1, a_{12} je 2, a_{21} je 3, a_{22} je 4.

3.4. Determinante trećeg reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Laplaceov razvoj determinante:

$|A| = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

Preciznije formula za Laplaceov razvoj determinante bi glasila:

razvoj po 1. stupcu:

„$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$“

(Klobučar, 2013., str. 1)

ili

razvoj po 1. retku:

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

„Lako se možemo uvjeriti da se identična vrijednost dobiva i razvojem determinante po bilo kojem retku ili stupcu.“ (Dakić i Elezović, 2009., str. 6).

Razvoj po 2. retku:

$$|A| = a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Sarrusovo pravilo

„Determinante trećeg reda možemo računati na još jedan način, uporabljujući sljedeće jednostavno pravilo: prva dva stupca determinante nadopišu se iza trećeg i zatim se računaju umnošci po tri elementa postavljena dijagonalno jedan do drugog. Umnošci silaznih dijagonala uzimaju se s predznakom $+$, a uzlaznih s predznakom $-$:

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (c_1 b_2 a_3 + c_2 b_3 a_1 + c_3 b_1 a_2).“$$

(Dakić, Elezović, 2009., str. 7)

Primjer 21:

Determinanta matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

3.5. Determinante četvrtog i višeg reda

Razvoj po 1. retku determinante 4. reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Formula:

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

„Neka je A matrica reda n. Ako u toj matrici izostavimo i-ti redak i j-ti stupac dobit ćemo matricu čiju determinantu zovemo subdeterminanta ili minora i označavamo sa M_{ij}.

Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Laplaceov razvoj po i-tom retku:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Laplaceov razvoj po j-tom stupcu:

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.\text{“}$$

(Keček, 2010., str. 32)

3.6. Svojstva determinanti

U ovoj cjelini prikazat će se nekoliko osnovnih svojstava determinanti (Keček, 2010., str. 33):

1. dodamo (oduzmemo) li nekom retku (stupcu) elemente nekog drugog retka (stupca) ili njihovu linearnu kombinaciju, vrijednost determinante se ne mijenja,
2. ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog njenog retka (stupca) brojem c, tada je $\det(B) = c \cdot \det(A)$,
3. ako se neki redak ili stupac matrice sastoji samo od nula, determinanta te matrice jednaka je nuli,
4. ako je A trokutasta matrica, tada joj je determinanta jednaka produktu elemenata njezine glavne dijagonale,
5. ako su u matrici dva retka (stupca) proporcionalna, determinanta joj je jednaka nuli,
6. zamjenom dvaju redaka (stupaca) determinanta mijenja predznak.

4. INVERZNA MATRICA

„U inverznim matricama promatrat će se samo kvadratne matrice istog reda n“ (Elezović, 2006., str. 14) (M_n), zato jer u tom slučaju na istome skupu su definirane sve tri operacije koje smo radili do sada: zbrajanje, oduzimanje i množenje matrica.

Recimo da postoje dvije matrice A i B. Ako je A matrica iz M_n i postoji matrica $B \in M_n$ za koju vrijedi:

$$\text{„}A \cdot B = B \cdot A = I,$$

gdje je I jedinična matrica reda n,

onda je matrica A regularna ili invertibilna, a matrica B je njen inverz koji se označava $B = A^{-1}$. Za slučaj da matrica B ne postoji onda za matricu A kažemo da je singularna ili neinvertibilna." (Ilišević, 2014., str.21). Za I uvijek vrijedi da je invertibilna jer je $I \cdot I = I$, iz toga se može zaključiti da $I^{-1} = I$. Matrica A je invertibilna ako i samo ako je $detA \neq 0$.

Kod recipročnih brojeva množenjem se dobije vrijednost 1, ali kada se množi matrica s njezinim inverzom onda se dobije jedinična matrica $I = A^{-1} \cdot A$.

Svojstva jedinične matrice su:

- kvadratna je (ima isti broj redaka i stupaca),
- ima sve jedinice na dijagonali, a bilo gdje drugdje nule,
- označava se slovom I,
- može biti bilo kojeg reda

4.1. Računanje inverzne matrice Cramerovim pravilom

Inverzna matrica se računa formulom:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A),$$

gdje je $adj(A)$ adjungirana matrica matrice A:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{12} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primjer 22:

Adjungirana matrica matrice 2. reda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Traži se kofaktor svakog broja u matrici. Koristi se formula $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$$

$$A_{11} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

Nakon što smo izračunali kofaktore potrebno je još transponirati matricu da bi dobili adjungiranu matricu:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer 23:

Adjungirana matrica matrice 3. reda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (5 \cdot 1 - 6 \cdot 8) = -43$$

$$\vdots$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -3$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -43 & 38 & -3 \\ 22 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -43 & 22 & -3 \\ 38 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Primjer 24:

Inverz matrice

Uzet će se matrica iz prethodnog primjera 23. Potrebno je još samo pronaći determinantu matrice i nakon toga uvrstiti u formulu za inverz matrice.

$$|A| = 1 \cdot (5 \cdot 1 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 1 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) = 24$$

Nakon toga uvrštavamo u formulu za inverz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A) = \frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} -43 & 22 & -3 \\ 38 & -20 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{43}{24} & \frac{11}{12} & -\frac{1}{8} \\ \frac{19}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Primjer 25:

Recimo da se brojevi ne mogu dijeliti. Zadatak je da se nađe kako 20 olovaka podijeliti na 4 čovjeka.

Uzima se recipročna vrijednost od broja 4 što je 0.25. Nakon toga se množi:

$$20 \cdot 0.25 = 5$$

Potrebno je pronaći X.

$$XA = B \qquad \cancel{X = \frac{B}{A}}$$

Jednadžba se množi sa A^{-1}.

I je neutralni element kod množenja matrica

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \longrightarrow I = A \cdot A^{-1}$$

$$XI = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

U ovom primjeru je potrebno paziti na poredak matrica, tj. općenito kod množenja matrica je potrebno paziti na poredak jer množenje matrica nije komutativno.

U slučaju: $AX = B$, X se izračunava na sljedeći način:

$$A^{-1} \cdot \quad \backslash \; AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \quad \text{//upotrijebi se činjenica } I = A^{-1} \cdot A$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

4.2. Računanje inverzne matrice Gauss-Jordanovom metodom

Drugi način računanja inverzne matrice je pomoću Gauss-Jordanove metode.

Prvi korak je da se napiše kvadratna matrica s lijeve strane, a s desne strane jedinična matrica.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ta matrica se zapisuje u obliku $[A|I]$.

Cilj je da se u pravokutnoj formi s lijeve strane dobije jedinična matrica. Kada se dobije jedinična matrica s lijeve strane, onda će desna strana biti inverz.

Primjer 26:

Inverzna matrica Gauss-Jordanovom metodom

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim (1. red\ zamjenjujemo\ s\ 2. redom)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -7R_1 + R_3 \to R_3 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -37 & -41 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7}R_2 \to R_2 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -37 & -41 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} -5R_2 + R_1 \to R_1 \\ 37R_2 + R_3 \to R_3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{37}{7} & \frac{25}{7} & 1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \frac{7}{9}R_3 \to R_3 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{9} & \frac{25}{9} & \frac{7}{9} \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}R_3 + R_1 \to R_1 \\ -\frac{8}{7}R_3 + R_2 \to R_2 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{41}{9} & -\frac{26}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{9} & \frac{25}{9} & \frac{7}{9} \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

$R_1 \to prvi\ red$

$R_2 \to drugi\ red$

$R_3 \to treći\ red$

Matrica A je regularna i njena inverzna matrica iznosi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{41}{9} & -\frac{26}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{37}{9} & \frac{25}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}.$$

4.3. Primjena inverzne matrice

Na autobusnoj stanici u Poreču su se prodavale karte. Cilj je otkriti koliko se prodalo jednosmjernih i povratnih karata za relaciju Poreč – Pula u jednom danu. Jednosmjerna karta po redovnoj cijeni iznosi 60 kn, a za studente 45 kn. Povratna karta iznosi 100 kn, a za studente 70 kn. Ukupna cijena za jednosmjerne karte iznosi 1695 kn, a za povratne karte 2770 kn.

$$[x_1 x_2] \cdot \begin{bmatrix} 60 & 100 \\ 45 & 70 \end{bmatrix} = [1695 \;\; 2770]$$

Jednosmjerna Dvosmjerna

$$XA = B$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 100 \\ 45 & 70 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{60 \cdot 70 - 100 \cdot 45} \cdot \begin{bmatrix} 70 & -100 \\ -45 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{30} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Zatim se dalje može riješiti pomoću:

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$[x_1 \; x_2] = [1695 \; 2770] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{30} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = [-395.5 + 415.5 \quad 565 - 554]$$

$$= [20 \;\; 11]$$

Prodano je 20 jednosmjernih karta po redovnoj cijeni od 60 kn i 11 karata za studente po cijeni od 45 kn što je ukupno 1695 kn. Također je prodano i 20 povratnih karata po cijeni od 100 kn i 11 karata za studente po cijeni od 70kn, što je ukupno 2770 kn.

Ako bi time primijenili da je $AX = B$, onda bi to izgledalo ovako:

$$\begin{bmatrix} 60 & 45 \\ 100 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1695 \\ 2770 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 45 \\ 100 & 70 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{60 \cdot 70 - 45 \cdot 100} \cdot \begin{bmatrix} 70 & -45 \\ -100 & 60 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} 70 & -45 \\ -100 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{30} & 0.15 \\ \frac{1}{3} & -0.2 \end{bmatrix}.$$

Zatim slijedi $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{30} & 0.15 \\ \frac{1}{3} & -0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1695 \\ 2770 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

5. ELEMENTARNE MATRICE

Jedan od načina za računanje reduciranog oblika matrice je pomoću elementarne transformacije.

„Reducirani oblik ili forma matrice opisan je sljedećim uvjetima:

1. prvi ne-nul element (stožer) svakog retka iznosi 1, a svi preostali elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli,
2. svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element,
3. svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera. Strogo zapisano, ako stožer u retku i_1 leži u stupcu j_1, a stožer u retku i_2, $i_2 > i_1$ leži u stupcu j_2, tad je $j_2 > j_1$.“ (Elezović, 2006., str. 44).

Stožer je element na lijevoj strani matrice za koji želimo da elementi iznad i ispod budu jednaki nuli.

Primjer 27:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz ovog primjera se može vidjeti da je matrica u reduciranom obliku zbog toga jer svaki sljedeći stožer mora se nalaziti desno od prethodnog stožera. Ispod, iznad i s lijeve strane jedinice sve vrijednosti trebaju biti nula.

Sljedeće operacije su elementarne transformacije:

„Na retcima:

1. zamjena dvaju redaka matrice,
2. množenje jednog retka matrice istim brojem različitim od nule,
3. dodavanje jednog retka pomnoženog brojem različitim od nule drugom retku matrice.

Na stupcima:

1. zamjena dvaju stupaca matrice,
2. množenje jednog stupca matrice istim brojem različitim od nule,
3. dodavanje jednog stupca pomnoženog brojem različitim od nule drugom stupcu matrice“ (Kosor, 2016. a).

Iz toga se može zaključiti da su elementarne transformacije sve navedene operacije kako bi se dobio reducirani oblik matrice.

Primjer 28:

Elementarne transformacije

Cilj ovog primjera je prikazati kako dobiti matricu u reduciranom obliku pomoću elementarnih transformacija.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

E predstavlja elementarnu matricu, dok A predstavlja matricu formata 3×4.

Prva dva koraka izgledaju ovako:

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

Kao što se može zaključiti iz prva dva koraka matricu je potrebno staviti u reducirani oblik. Množenje s E_1 predstavlja prvi korak, gdje je E_1 matrica u kojoj je stavljen broj -5 na poziciji (2,1), dok je drugi korak množenje s E_2, gdje je E_2 matrica u kojoj je stavljen broj -9 na poziciji (3,1).

Nakon toga se računa E_3, E_4, E_5:

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I konačni rezultat glasi:

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U zadnjem koraku se može uočiti da je E_5 matrica u kojoj je stavljen broj -2 na poziciji (1,2) jer je potrebno maknuti broj 2 iz druge matrice. Kao što je već navedeno prije da matrica bude u reduciranom obliku, ispod iznad i sa lijeve strane stožernog elementa trebaju biti nule.

6. LINEARNA ZAVISNOST I NEZAVISNOST VEKTORA

„Ako je zadano n vektora duljine m i isto toliko koeficijenata, njihova linearna kombinacija je onda vektor v koji se dobije kao rezultat množenja skalarom i zbrajanja vektora:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, A_i.$$

Trivijalne kombinacije vektora su kombinacije kod kojih se podrazumijeva da su koeficijenti samo nule. Svaki rezultat koji se dobije trivijalnom kombinacijom vektora je nul-vektor.“ (Kosor, 2016. b)

Primjer 29:

Trivijalna kombinacija vektora duljine 4

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Netrivijalna kombinacija je svaka kombinacija kod koje je barem jedan koeficijent različit od nule, tj. svaka kombinacija koja nije trivijalna.

Skup vektora $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ je linearno nezavisan u slučaju kada je svaka netrivijalna kombinacija s koeficijentima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ različita od nul-vektora, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \neq 0.$$

U suprotnom je skup S linearno zavisan.

Primjer 30:

Treba otkriti je li skup linearno zavisan ili nezavisan.

$$\mathrm{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

$$-3 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

U ovom primjeru se može vidjeti na koji način se može doći do rezultata koji je nul-vektor. Skup je linearno zavisan jer jedna netrivijalna kombinacija elemenata skupa daje nul-vektor.

7. RANG MATRICE

Rang matrice je broj ne nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označava se sa $r(A)$.

Postupak određivanja ranga je da se prvo matrica svede na reducirani oblik, s time da nije potrebno napravit postupak do kraja već postoji mogućnost da se postupak zaustavi kada se uočavaju stožerni elementi ispod kojih se nalaze nule, tj. kada se uoči da ispod, iznad i s lijeve strane stožernog elementa se nalaze vrijednosti 0. Kao što je već prethodno napomenuto, rang matrice je povezan sa reduciranim oblikom matrice ili nalaženjem inverzne matrice itd.

Za rang matrice vrijedi da je neovisan o tome da li se računa u odnosu na stupce ili redove matrice. Ako sa $r'(A)$ označimo rang po retcima, a sa $r(A)$ rang po stupcima, to se može prikazati sljedećim svojstvima (Horvatić, 2004., str. 355.-361.):

Svojstvo 1

- $r'(A) \leq r(A)$

Znači, kao što je već prethodno spomenuto, rang po redcima nije veći od ranga po stupcima.

Svojstvo 2

- $r(A) = r'(A)$

Za rang po stupcima vrijedi da je jednak rangu po redcima.

Svojstvo 3

Matrica i transponirana matrica imaju isti rang.

- $r(A^T) = r(A)$

$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = 2$ ili $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = 2$

Računanje ranga matrice se svodi na matricu koja se prvo stavi u reducirani oblik.

Svojstvo 4

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Svojstvo 5

Dvije matrice istog tipa su ekvivalentne ako i samo ako imaju isti rang.

Primjer 31:

Odredi rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{\substack{-4R_1 + R_2 \to R_2 \\ -7R_1 + R_3 \to R_3}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \overset{6R_2 + R_3 \to R_3}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da se odredi rang matrice prvo je potrebno matricu staviti u reducirani oblik i nakon toga sve jedinice koje se nalaze na dijagonali predstavljaju rang matrice i zbog toga rang ove matrice iznosi 2.

8. SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

8.1. Gaussova i Gauss-Jordanova metoda eliminacije

U poglavlju inverznih matrica bilo je prikazano kako se računa inverz matrice pomoću metode Gauss-Jordanovih eliminacija. Sada će se detaljnije prikazati razlika između Gaussovih eliminacija i Gauss-Jordanovih eliminacija.

Gaussovom metodom se rješavaju sustavi linearnih jednadžbi. Opći oblik linearne jednadžbe:

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n = 0.$$

Postoji mogućnost da sustav ima beskonačno rješenja, ni jedno rješenje ili jedinstveno rješenje.

Primjer 32:

Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

Može se zapisati u ekvivalentnom obliku $AX = B,$ tj.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matrica A naziva se matrica sustava, matrica X naziva se vektor nepoznanica, a matrica B naziva se slobodni vektor. Sustavi linearnih jednadžbi se mogu također zapisati kao proširene matrice sustava:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right].$$

Glavna razlika između Gaussove eliminacije i Gauss-Jordanove eliminacije je ta što se kod Gaussove metode matrica mora staviti u oblik na način da jedinice budu na dijagonali, a ispod njih i s lijeve strane se nalaze nule. Gauss-Jordanova eliminacija je slična samo što se kod jedinica koje se nalaze na dijagonali nule moraju nalaziti i iznad jedinica. Prema bilo kojoj eliminaciji dobit će se isto rješenje.

Primjer 33:

Rješavanje sustava metodom Gaussove eliminacije

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & 3 \end{array}\right] \overset{\substack{-4R_1 + R_2 \to R_2 \\ -4R_1 + R_3 \to R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & -6 & -3 & -1 \end{array}\right] \overset{6R_2 + R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{9}R_3 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Matrica se svodi na reducirani oblik. Sljedeće je potrebno izračunati x, y i z.

Prema matrici iz trećeg reda može se vidjeti da z iznosi 1 i rezultat toga je $z = \frac{1}{3}$. Svaki stupac predstavlja x, y i z, pa se može vidjeti da broj jedan koji je na poziciji (3,3) je zapravo $1z$ i prema tome zaključujemo da z iznosi $\frac{1}{3}$. Zadnji stupac predstavlja slobodne koeficijente.

Zatim se prema drugom redu izračuna y. Uočavaju se brojevi 1, 2 i $\frac{2}{3}$, što znači da je $1y + 2z = \frac{2}{3}$. z već znamo da iznosi $\frac{1}{3}$ pa njega samo uvrštavamo.

$$y + 2z = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3} - 2z$$

$z\ je\ \frac{1}{3}$, pa se samo uvrštava:

$$y = \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

Zatim se računa x. Prema prvom redu u matrici vrijedi sljedeće: $1x + \ 2y + \ 3z = 1$.

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$x = 1 - 2y - 3z$$

y je izračunat prije i on iznosi 0, a z je $\frac{1}{3}$.

$$x = 1 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$x = 0$$

Na kraju smo dobili da z iznosi $\frac{1}{3}$, y i x iznose 0.

Kada se uvrste x, y i z dobije se matrica oblika:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Primjer 34:

Rješenje sustava metodom Gauss-Jordanove eliminacije

Uzet će se prethodni primjer i dovršiti prema metodi Gauss-Jordanove eliminacije. Izračun izgleda ovako:

$$R_3 + R_1 \to R_1$$

$$-2R_2 + R_1 \to R_1 \qquad -2R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Jedina razlika između ovog i prethodnog primjera je to što se kod Gauss-Jordanove metode eliminacije matrica svodi na reducirani oblik kao što je već prije navedeno, pa je iz toga potrebno samo iščitati rješenja (x, y i z u našem primjeru), dok kod Gaussove metode eliminacije matrica nije svedena na reducirani oblik, nego je gornje trokutasta.

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{1}{3}$$

8.2. Homogeni i nehomogeni sustavi linearnih jednadžbi

„Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti jednaki nula." (Jadrijević, 2007., str. 13)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Homogeni sustavi se također mogu prikazati u matričnoj formi, a to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{32} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

„Sustav $AX = 0$ uvijek ima rješenje." (Elezović, 2006., str. 65)

Kako funkcionira homogeni sustav najbolje je i najjednostavnije prikazati preko primjera.

Primjer 35:

Homogeni sustav

$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0$$

$$9x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 8 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0\\ 9 & 5 & 1 & 0\end{array}\right] \overset{\substack{-3R_1 + R_2 \to R_2 \\ -9R_1 + R_3 \to R_3}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 8 & 0\\ 0 & -16 & -16 & 0\\ 0 & -58 & -71 & 0\end{array}\right] \overset{-\frac{1}{16}R_2 \to R_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -58 & -71 & 0\end{array}\right] \overset{58R_2 + R_3 \to R_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -13 & 0\end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{1}{13}R_3 \to R_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 7 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

U stupcu su koeficijenti ispred $x_1, x_2\ i\ x_3$.

Iz trećeg reda gdje se nalazi broj jedan na poziciji (3,3), $x_3 = 0$.

Iz drugog reda na poziciji (2,2) i (2,3) se nalaze x_2 i x_3, slijedi da je:

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Iz prvog reda slijedi:

$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Glavna razlika kod homogenih i nehomogenih sustava je ta što kod nehomogenih ne mora postojati ni jedno rješenje dok kod homogenih mora postojati barem jedno (trivijalno) rješenje.

Primjer 36:

Nehomogeni sustav

$$„2x + 3y = 4$$

$$4x + 6y = 7$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Iz drugoga retka reducirane matrice čitamo jednadžbu

$$0x_1 + 0x_2 = -1,$$

koja dakako nema rješenja. Stoga nema rješenja niti početni sustav. Gornji sustav $AX = b$ ekvivalentan je s ovim zapisom

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Odrediti njegovo rješenje isto je što i odrediti koeficijente x i y tako da vektor b bude linearna kombinacija vektor-stupaca matrice A! Kako su ti stupci proporcionalni (=linearno zavisni!), to je svaka linearna kombinacija oblika

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

za neki skalar λ, a vektor b nije takvoga oblika. Zato sustav nema rješenja.“ (Elezović, 2006., str. 67)

8.3. Cramerovo pravilo

Metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi s n jednadžbi i n nepoznanica je Cramerovim pravilom. Za sve matrice koje imaju više od 3 reda, nije preporučljivo koristiti Cramerovo pravilo.

Prvi korak u Cramerovom pravilu je da odredimo determinantu matrice sustava koja se označava sa D. Zatim se određuju D_i determinante koje dobijemo tako da se u determinanti D zamijeni i-ti stupac vektorom b (vektor slobodnih koeficijenata).

$$D_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ako je npr. zadan sustav sa tri nepoznanice, za njega će vrijediti sljedeća pravila:

(*)

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D},$$

gdje se D_x računa na način da se prvi stupac iz matrice zamijeni vektorom slobodnih koeficijenata linearnog sustava. Nakon toga se računa determinanta kao što je već prije prikazano u prethodnim cjelinama. Na kraju se uvrštavaju determinante u formulu $\frac{D_x}{D}$ i dobiva se rezultat za x.

D_y i D_z se računaju na isti način. Jedina je razlika ta što se kod D_y vektor slobodnih koeficijenata linearnog sustava uvrštava u drugi stupac matrice, a kod D_z u treći stupac matrice.

Ako imamo npr. jednadžbu $2x + 3y - z + 5 = 0$, potrebno je broj 5 prebacit na stranu vektora slobodnih koeficijenata. I to bi na kraju izgledalo ovako

$$2x + 3y - z = -5.$$

Primjer 37:

Cramerovo pravilo

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$3y + z = 8$$

$$6x - 3y = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Prvo je potrebno izračunati determinante:

$$D = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 3 + 12 - 54 = -39$$

$$Dx = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -52$$

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -130$$

$$Dz = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix} = 78$$

Zatim se pomoću formula (∗) mogu izračunati x, y i z.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{52}{39} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{130}{39} = \frac{10}{3}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = -\frac{78}{39} = -2$$

9. PRIMJENA MATRICA U SUSTAVIMA LINEARNIH JEDNADŽBI

U ovoj cjelini prikazat će se primjeri iz prakse koji se mogu riješiti pomoću različitih metoda sa matricama.

Zadatak 1

Osoba ima na raspolaganju 25 000 kn koje ulaže u dionice A s prinosom od 13% godišnje i u dionicu B s prinosom od 6% godišnje i dionicu C s 4% prinosa godišnje. Koliko osoba mora utrošiti u svaku dionicu da ostvari prihod od točno 1 950 kn?

Također, strategija je osobe u dionicu C uložiti 1 500 kn manje nego u dionicu A.

$$A, B, C = ?$$

$$A + B + C = 25\,000$$

$$0.13A + 0.06B + 0.04C = 1\,950$$

$$A - C = 1\,500$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25\,000 \\ 0.13 & 0.06 & 0.04 & 1\,950 \\ 1 & 0 & -1 & 1\,500 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} -0.13R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

Ovaj zadatak se isto rješava pomoću Gaussove metode eliminacije.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & -0.07 & -0.09 & -1\,300 \\ 0 & -1 & -2 & -23\,500 \end{array}\right] \longrightarrow -\frac{1}{0.07}R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{130\,000}{7} \\ 0 & -1 & -2 & -23\,500 \end{array}\right] \longrightarrow R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{130\,000}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{34\,500}{7} \end{array}\right] \longrightarrow -\frac{7}{5}R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{130\,000}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 6\,900 \end{array}\right]$$

$$C = 6\,900$$

$$B + \frac{9}{7}C = \frac{130000}{7}$$

$$B = \frac{130\,000}{7} - \frac{9}{7} \cdot 6\,900 = 9\,700$$

$$A + B + C = 25\,000$$

$$A = 25\,000 - B - C = 25\,000 - 9\,700 - 6\,900 = 8\,400$$

Osoba mora uložiti 8 400 kn u dionicu A, 9 700 kn u dionicu B, 6 900 kn u dionicu C da ostvari prihod od 1 950 kn.

Zadatak 2

Jedan je ulagač prodao tri paketa dionica u tri pokušaja. Prvi je puta prodao 100 dionica poduzeća A, 100 poduzeća B i 200 poduzeća C te pritom dobio 65 000 kn. Drugi je puta prodao paket s 50 dionica poduzeća A, 200 poduzeća B i 100 poduzeća C, zaradivši pritom 55 000 kn. Treći je puta zaradio 45 000 kn prodavši 100 dionica poduzeća A, 100 poduzeća B i 100 poduzeća C.

Kolika je cijena svake dionice?

$$A, B, C = ?$$

$$100A + 100B + 200C = 65\,000$$

$$50A + 200B + 100C = 55\,000$$

$$100A + 100B + 100C = 45\,000$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 65\,000 \\ 50 & 200 & 100 & 55\,000 \\ 100 & 100 & 100 & 45\,000 \end{array}\right] \longrightarrow \frac{1}{100}R_1 \to R_1$$

Primjer će se riješiti pomoću Gauss-Jordanove metode.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 50 & 200 & 100 & 55\,000 \\ 100 & 100 & 100 & 45\,000 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} -50R_1 + R_2 \to R_2 \\ -100R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 0 & 150 & 0 & 22\,500 \\ 0 & 0 & -100 & -20\,000 \end{array}\right] \longrightarrow \frac{1}{150}R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -100 & -20\,000 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} -\frac{1}{100}R_3 \to R_3 \\ -R_2 + R_1 \to R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \longrightarrow -2R_3 + R_1 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

Cijena dionice A je 100 kn, B je 150 kn i C je 200 kn.

Zadatak 3

„Uzlazna brzina rakete u vremenu t računa se jednadžbom $v(t) = ax^2 + bx + c$. Smatra se da je brzina u vremenu od 3, 6 i 9 sekundi jednaka 103, 214 i 335 km/h. Potrebno je pronaći koliko iznosi brzina u 15-oj sekundi." (BrainKart, 2020.).

$$v(3) = 103$$

$$v(6) = 214$$

$$v(9) = 335$$

Kada se uvrsti u formulu dobije se:

$$9a + 3b + c = 103$$

$$36a + 6b + c = 214$$

$$81a + 9b + c = 335$$

Može se vidjeti da se ovaj zadatak može riješiti pomoću Gaussove metode eliminacije ili Cramerovim pravilom. Prikazat će se pomoću Gaussove metode eliminacije.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 103 \\ 36 & 6 & 1 & 214 \\ 81 & 9 & 1 & 335 \end{array}\right] \rightarrow \left(\frac{R_1}{9} \rightarrow R_1\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{103}{9} \\ 36 & 6 & 1 & 214 \\ 81 & 9 & 1 & 335 \end{array}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} -36R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -81R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{103}{9} \\ 0 & -6 & -3 & -198 \\ 0 & -18 & -8 & -592 \end{array}\right] \rightarrow \left(-\frac{R_2}{6} \rightarrow R_2\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{103}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 33 \\ 0 & -18 & -8 & -592 \end{array}\right] \to \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{3} + R_1 \to R_1 \\ 18R_2 + R_3 \to R_3 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$c = 2$$

$$b + \frac{1}{2}c = 33$$

$$b = 33 - \frac{1}{2}c$$

$$b = 32$$

$$a = \frac{4}{9} + \frac{1}{18}c = \frac{5}{9}$$

Zatim se dobiveni rezultati uvrste u formulu za brzinu rakete.

$$v(t) = \frac{5}{9}x^2 + 32x + 2$$

Tražena je brzina u petnaestoj sekundi:

$$v(15) = \frac{5}{9} \cdot 15^2 + 32 \cdot 15 + 2 = 607\,\frac{km}{h}$$

Zadatak 4

„Osoba želi piti mlijeko i sok od naranče kako bi povećala količinu kalcija i vitamina A u svakodnevnoj prehrani. 30 ml mlijeka sadrži 37 miligrama kalcija i 57 mikrograma vitamina A, a 30 ml soka od naranče sadrži 5 miligrama kalcija i 65 mikrograma vitamina A. Koliko ml mlijeka i soka od naranče osoba treba piti svaki dan kako bi točno unijela 600 miligrama kalcija i 1300 mikrograma vitamina A?“ (Pearsonhighered, 2020., str. 180)

$$x - mlijeko\ (ml)$$

$$y - sok\ od\ naranče\ (ml)$$

Podijelimo zadane podatke sa 30 da dobijemo mjeru po 1 ml, što iznosi kada uvrstimo:

$$\frac{37}{30}x + \frac{1}{6}y = 600$$

$$\frac{19}{10}x + \frac{13}{6}y = 1\,300$$

Ovaj primjer će se riješiti pomoću Cramerovog pravila.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{37}{30} & \frac{1}{6} \\ \frac{19}{10} & \frac{13}{6} \end{bmatrix} = \frac{106}{45} = 2.3\dot{5}$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 600 & \frac{1}{6} \\ 1300 & \frac{13}{6} \end{bmatrix} = \frac{3250}{3} = 1083.\dot{3}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} \frac{37}{30} & 600 \\ \frac{19}{10} & 1\,300 \end{bmatrix} = \frac{1390}{3} = 463.\dot{3}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1083.\dot{3}}{2.3\dot{5}} \approx 459.91$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{463.\dot{3}}{2{,}3\dot{5}} \approx 196.7$$

Ako osoba pije 459.91 ml mlijeka i 196.7 ml soka od naranče dobit će 600 miligrama kalcija i 1 300 mikrograma vitamina A.

Zadatak 5

Tvrtka „Links“ otvara novu prodavaonicu i namjerava kupiti veću količinu monitora i računala. Prosječna vrijednost monitora je 1 000 kn, dok je prosječna vrijednost računala 4000 kn.

Ako treba kupiti 950 artikala s proračunom od 3 500 000 kn, koliko će se kupiti monitora, a koliko računala?

$$x - broj\ monitora$$

$$y - broj\ računala$$

$$x + y = 950$$

$$1\,000x + 4\,000y = 3500000$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1\,000 & 4\,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 3500000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1\,000 & 4\,000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 950 \\ 3500000 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

Traži se inverz matrice A pomoću Gauss-Jordanove metode eliminacije.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1\,000 & 4\,000 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-1000R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3\,000 & -1\,000 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3000}R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\,000} \end{array}\right] \overset{-R_2 + R_1 \to R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\,000} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\,000} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\,000} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\,000} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3\,000} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\,000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950 \\ 3500000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 850 \end{bmatrix}$$

Links će kupiti 100 monitora i 850 računala.

10. PRIMJENA MATRICA U WEB APLIKACIJI

Postoje razni alati na internetu pomoću kojih se mogu računati matrice, a neki od tih su: Matrix Reshis, OnlineMSchool, WolframAlpha, Symbolab itd. U ovoj cjelini će se prikazati konkretno kako se koristi web aplikacija Matrix Reshis.

10.1. Matrix Reshish

Matrix Reshis je besplatna aplikacija koja se može na jednostavan način koristiti bez ikakve instalacije. Matrix Reshis podržava više operacija koje se rade pomoću matrica, a to su: Gauss-Jordanova eliminacija, Cramerovo pravilo, računanje inverzne matrice, rang matrice, determinanta, kvadriranje matrice, transponiranje matrice, množenje matrica te zbrajanje i oduzimanje matrica. Svaka pojedina opcija se može izabrati s lijeve trake na stranici gdje se jednostavnim klikom pojavi nova stranica koja od nas traži da unesemo format matrice.

Slika 3. Odabir pojedinih opcija

Izvor: autor

Ova aplikacija ne prikazuje samo rješenje već prikazuje i svaki potrebni korak koji je potrebno napraviti i objašnjenje uz njega.

10.1.1. Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Prvo će se rješavati sustav linearnih jednadžbi.

Slika 4. Postavljanje matrice

Izvor: autor

Prvi korak je da se postavi željena matrica. Najveća matrica koja je podržana je formata 100×101. Nije preporučljivo da se koriste veliki brojevi za matricu jer se može desiti da se preglednik zamrzne.

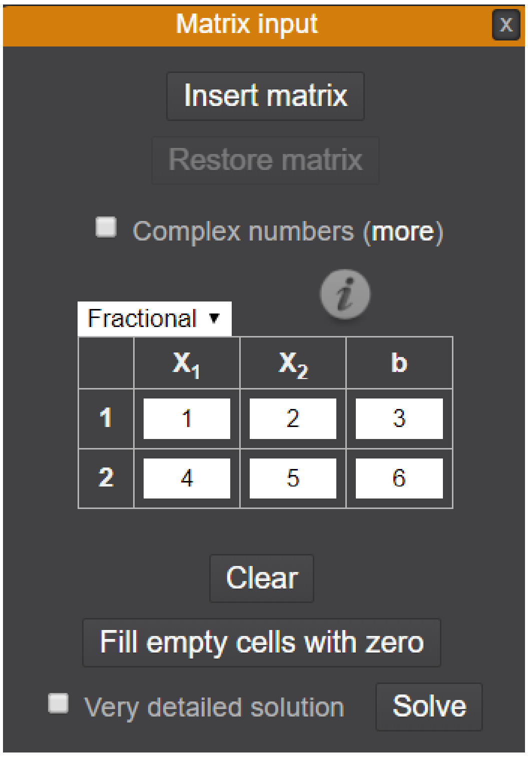
Ako imamo linearni sustav koji glasi:

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6,$$

u „Matrix Reshish“ unosimo u prvi stupac koeficijente iz prve jednadžbe sustava, a to su 1, 2 i 3, dok u drugi stupac unosimo koeficijente iz druge jednadžbe, a to su 4, 5 i 6.

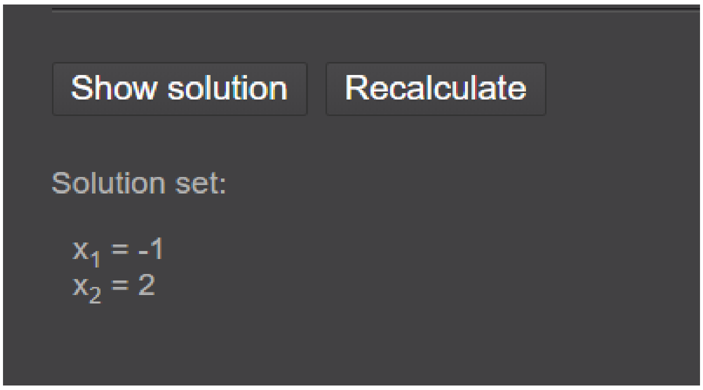
Slika 5. Unos elemenata u matricu



Izvor: autor

Nakon što se postavi matrica dolazi zadani prozor gdje se unose elementi matrice. Ukoliko postoje kompleksni brojevi u matrici, onda je potrebno označiti „Complex numbers“. Važno je napomenuti da Matrix Reshish podržava decimalne brojeve pa i razlomke. Za to je potrebno otvoriti padajući meni gdje se bira da li će se unositi decimalni (Decimal) brojevi ili razlomci (Fractional). Tipka „Clear“ služi da pobriše sve vrijednosti koje se nalaze u matrici. „Fill empty cells with zero“ služi da se sva polja koja su ostala prazna automatski ispune nulama. Kada se stisne „Solve“ dobije se rješenje.

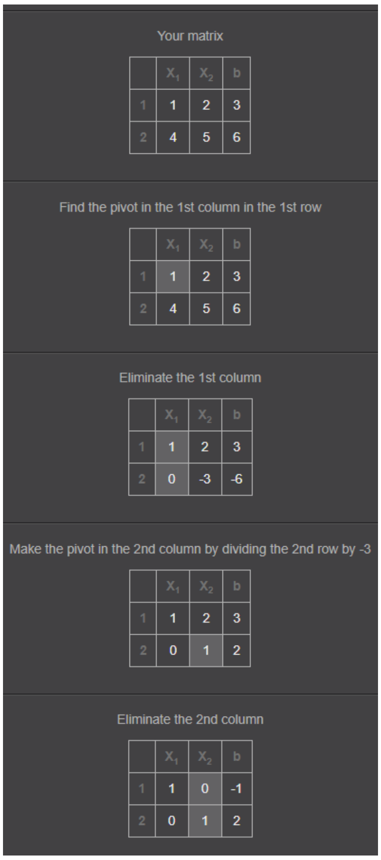
Slika 6. Prikaz rješenja



Izvor: autor

Ispisano je konačno rješenje koje je softver riješio pomoću Gauss-Jordanove metode. Pritiskom na „Show solution“ ispisuju se svi koraci koji su napravljeni.

Slika 7. Koraci rješavanja Gauss-Jordanovom metodom



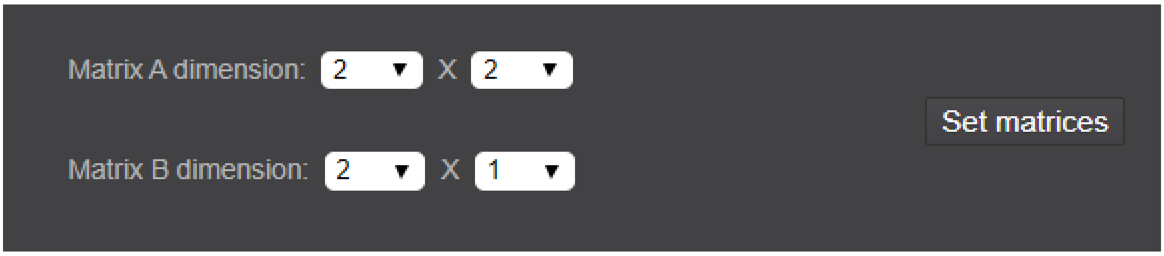
Izvor: autor

Postupak rješavanja:

- prvi red se množi sa -4 i nakon toga se zbraja sa drugim redom
- drugi red se množi sa $-\frac{1}{3}$
- drugi red se množi sa -2 i zbraja sa prvim redom

Na isti način podaci se unose za Cramerovo pravilo, inverznu matricu i determinantu dok je za druge operacije potrebno odrediti veličine za dvije matrice (npr. za množenje).

Slika 8. Množenje matrice



Izvor: autor

10.1.2. Cramerovo pravilo

Primjer 38:

Rješavanje zadatka 4 pomoću aplikacije „Matrix Reshish“

Kao što je već prije navedeno za ovaj zadatak vrijede sljedeće dvije linearne jednadžbe:

$$\frac{37}{30}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 600$$

$$\frac{19}{10}x_1 + \frac{13}{6}x_2 = 1300.$$

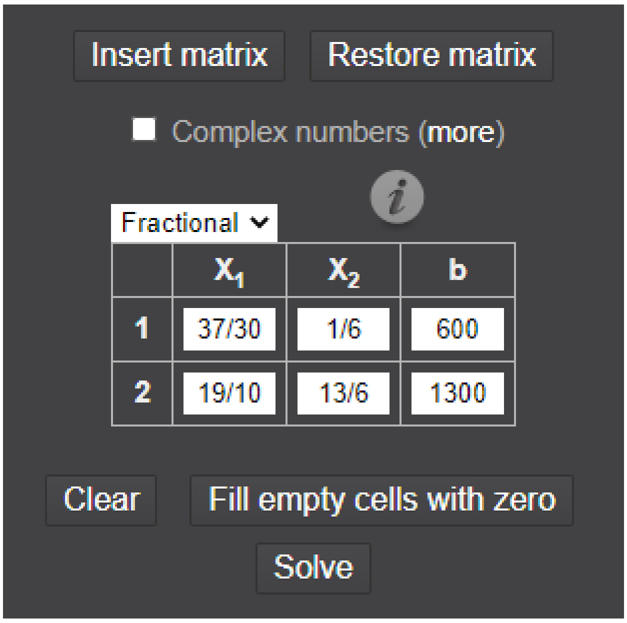
Iz toga se može zaključiti da će nam biti potrebna matrica formata 2×2, tj. 2×3 jer unosimo i slobodne koeficijente linearnog sustava.

Slika 9. Postavljanje formata matrice

Izvor: autor

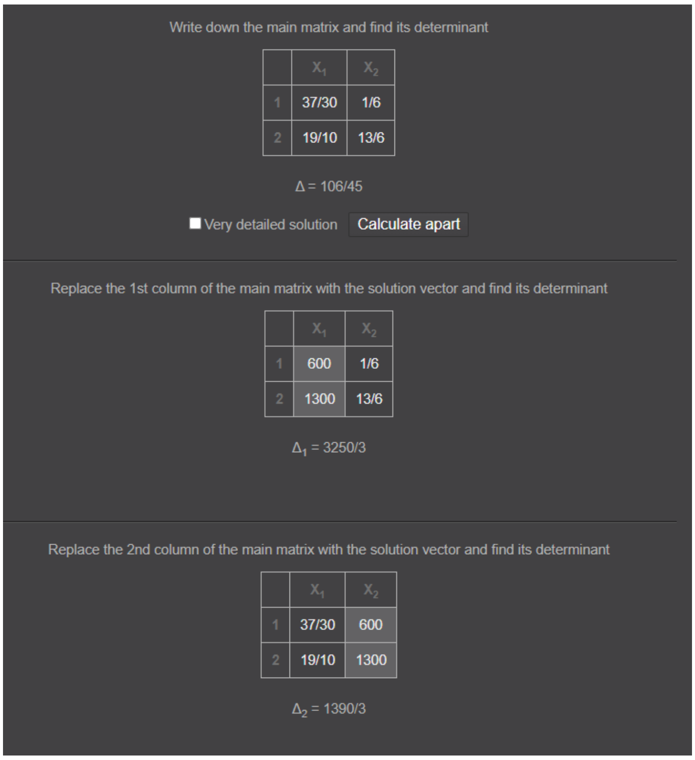
Nakon toga se unose vrijednosti koeficijenta.

Slika 10. Unos elemenata matrice



Izvor: autor

Slika 11. Koraci rješavanja Cramerovim pravilom



Izvor: autor

Prvi korak je računanje determinante (D). Ona se računa tako da se unakrsno pomnože elementi.

$$\frac{37}{30} \cdot \frac{13}{6} - \frac{19}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{106}{45} = 2.3\dot{5}$$

Drugi korak je računanje D_{x1}. Kao što je već prije prikazano u [zadatku 4,] slobodni koeficijenti linearnog sustava se upisuju u prvi stupac dok za D_{x2} se upisuju u drugi stupac.

D_{x1} *i* D_{x2} predstavljaju isto što i D_x i D_y iz zadatka 4.

Za D_{x1} aplikacija ispisuje rješenje da je $\frac{3250}{3}$, a za D_{x2} ispisuje da je $\frac{1390}{3}$.

Slika 12. Konačno rješenje Cramerovom metodom

$x_1 = \Delta_1 / \Delta = (3250/3) / (106/45) = 24375/53$
$x_2 = \Delta_2 / \Delta = (1390/3) / (106/45) = 10425/53$

Izvor: autor

x_1 se računa kao $\frac{D_{x1}}{D}$, a x_2 kao $\frac{D_{x2}}{D}$.

Prednost Matrix Reshisa je ta što je popriličnio brz. Rezultat slijedi unutar samo nekoliko milisekundi. Također jedna prednost koja je spomenuta prije je da je aplikacija besplatna. I web stranica aplikacije je „responsive“, što znači da je prilagođena za mobitele.

Glavni nedostatak aplikacije je taj da ako nemamo internetsku vezu onda je nije moguće koristiti i nije moguće unositi razlomke i decimalne brojeve u istu matricu već je potrebno odabrati jedno.

10.2. OnlineMSchool

„OnlineMSchool“ je isto besplatna aplikacija koji nudi sve operacije računanja sa matricom kao i „Matrix Reshish“. Jedina razlika između te dvije aplikacije je u izgledu stranice. „Matrix Reshish“ ima nešto bolji dizajn od „OnlineMSchoola“. Mana za „OnlineMSchool“ je ta što nije baš dobro napravljena za pregledavanje na mobitelu pa se sve mora zumirati. Prednost „OnlineMSchoola“ je to što se mogu istovremeno unositi decimalni brojevi i razlomci. Također, njegov opis rješenja je nešto bolji i jednostavniji jer prikazuje koja se operacija točno dešava na kojem redu.

10.2.1. Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Primjer 39:

Rješavanje zadatka 2 pomoću aplikacije „OnlineMSchool“

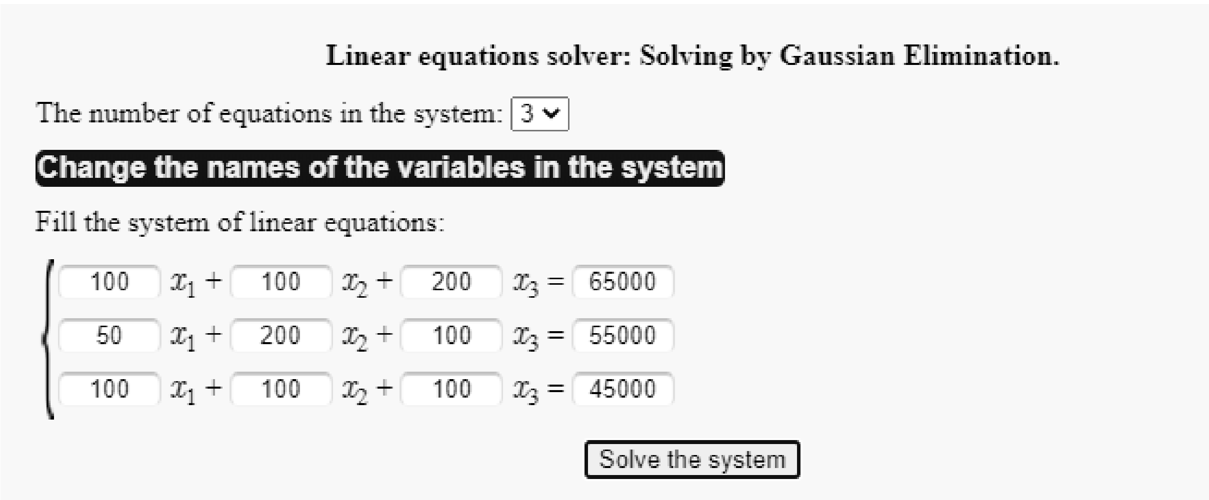
Kao što je već prije navedeno za ovaj zadatak vrijede sljedeće tri linearne jednadžbe:

$$100x_1 + 100x_2 + 200x_3 = 65000$$

$$50x_1 + 200x_2 + 100x_3 = 55000$$

$$100x_1 + 100x_2 + 100x_3 = 45000$$

Slika 13. Postavljanje zadatka u OnlineMSchool



Izvor: autor

Kao što se može vidjeti prema slici 14, prvo unosimo broj jednadžbi u sustavu, a to je 3. Nakon toga se unose koeficijenti linearnog sustava i stisne se gumb „Solve the system“ da program riješi zadatak.

Slika 14. Rješenje Gauss-Jordanovom metodom

$$\begin{cases} 100x_1 + 100x_2 + 200x_3 = 65000 \\ 50x_1 + 200x_2 + 100x_3 = 55000 \\ 100x_1 + 100x_2 + 100x_3 = 45000 \end{cases}$$

Rewrite the system in matrix form and solve it by Gaussian Elimination (Gauss-Jordan elimination)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 200 & 65000 \\ 50 & 200 & 100 & 55000 \\ 100 & 100 & 100 & 45000 \end{array}\right)$$

R_1 / 100 → R_1 (divide the 1 row by 100)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 50 & 200 & 100 & 55000 \\ 100 & 100 & 100 & 45000 \end{array}\right)$$

R_2 - 50 R_1 → R_2 (multiply 1 row by 50 and subtract it from 2 row); R_3 - 100 R_1 → R_3 (multiply 1 row by 100 and subtract it from 3 row)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 0 & 150 & 0 & 22500 \\ 0 & 0 & -100 & -20000 \end{array}\right)$$

R_2 / 150 → R_2 (divide the 2 row by 150)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 650 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -100 & -20000 \end{array}\right)$$

R_1 - 1 R_2 → R_1 (multiply 2 row by 1 and subtract it from 1 row)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -100 & -20000 \end{array}\right)$$

R_3 / -100 → R_3 (divide the 3 row by -100)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

R_1 - 2 R_3 → R_1 (multiply 3 row by 2 and subtract it from 1 row)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 150 \\ x_3 = 200 \end{cases}$$

Izvor: autor

Može se vidjeti da aplikacija funkcionira slično kao i „Matrix Reshish“, ispiše isto svaki korak rješavanja i uz to daje i objašnjenje.

Postupak rješavanja aplikacije:

- podijeli prvi red matrice sa 100
- pomnoži prvi red sa 50 i oduzmi od drugog reda
- pomnoži prvi red sa 100 i oduzmi od trećeg reda

- podijeli drugi red sa 150
- pomnoži drugi reda sa 1 i oduzmi od prvog reda
- podijeli treći red sa -100
- pomnoži treći red sa 2 i oduzmi od prvog reda

Nakon toga aplikacija ispisuje rješenja za x_1, x_2 i x_3, a to su 100, 150, 200.

11. ZAKLJUČAK

Matrice se koriste u svakodnevnom životu više nego što bi ljudi mogli zamisliti. Iz svih do sad navedenih cjelina se može vidjeti da se pomoću matrica mogu riješiti problemi koji se mogu primijeniti u stvarnom životu. Kada se matrice primijene u stvarnom životu može se uštedjeti na novcu i jednostavnije doći do rješenja. Matrice se mogu primijeniti u programiranju, u fizici, u robotici, statistici, videoigrama itd.

U ovom radu prikazano je više metoda rješavanja linearnih sustava, a to su: Gaussova metoda eliminacije, Gauss-Jordanova metoda eliminacije i Cramerovo pravilo. Prikazana je razlika između metoda Gaussove i Gauss-Jordanove eliminacije. Potrebno je zapamtiti samo da kod Gaussove eliminacije jedinice se moraju nalaziti samo na dijagonali, a s lijeve strane stožera moraju se nalaziti nule, dok kod Gauss-Jordanove eliminacije je potrebno da matrica bude u reduciranom obliku, tj. samo na dijagonali se smiju nalaziti jedinice dok svi ostali elementi trebaju biti nule.

Cramerovo pravilo se koristi za matrice manjeg formata u rješavanju sustava linearnih jednadžbi, međutim ako se koristi za matrice većeg formata lako se može napraviti pogreška u računanju. Preporučljivo je da se za matrice većeg formata koristi Gaussova metoda eliminacije, a za matrice manjeg formata može isto također Gassuova metoda eliminacije ali osobno bih preporučio Cramerovo pravilo.

„Matrix Reshish“ je alat pomoću kojeg se mogu izračunati gotove sve operacije s matricom, a to su: Gauss-Jordanova eliminacija, Cramerovo pravilo, rang matrice, inverz matrice, determinanta matrice, množenje, zbrajanje i oduzimanje matrica. Aplikacija je poprilično brza i rješenje se dobije unutar nekoliko milisekundi. U aplikaciji postoji opcija da se prikaže svaki korak u rješavanju s detaljnim obrazloženjem.

U ovom radu je korišten još jedan programski alat koji se nalazi na stranici „OnlineMSchool“. „OnlineMSchool“ također podržava sve operacije s matricom kao i aplikacija „Matrix Reshish“. Jedina prednost „OnlineMSchool-a“ je ta što se može unositi u istom sustavu i decimalni broj i razlomak dok „Matrix Reshish“ omogućava da se unese samo jedno od toga. „OnlineMSchool“ također ispisuje svaki korak uz obrazloženje.

LITERATURA

KNJIGE:

[1.] Dakić B. i Elezović N. (2009.) Matematika 3. Zagreb: Element

[2.] Elezović, N. (2006.) Linearna algebra. Zagreb: Element

[3.] Horvatić, K. (2004.) Linearna algebra. Zagreb: Golden marketing - Tehnička knjiga

ČLANCI:

[1.] Keček, D. (2010). Metode izračunavanja determinanti matrica n-tog reda. Osječki matematički list, 10 (1), 31-42. Preuzeto s https://hrcak.srce.hr/59277 (Pristupljeno: 30.08.2020.)

[2.] Nikšić, F. (2003). 'Svijet matrica', Playmath, I(2), str. 11-16. Preuzeto s: https://hrcak.srce.hr/2135 (Pristupljeno: 04.07.2020.)

INTERNETSKI IZVORI:

[1.] BrainKart (2020.) Solved Example Problems on Applications of Matrices: Solving System of Linear Equations. Dostupno na: https://www.brainkart.com/article/Solved-Example-Problems-on-Applications-of-Matrices--Solving-System-of-Linear-Equations_39079/ (Pristupljeno: 4.7.2020.)

[2.] Byju's (2020.) Properties of Determinants. Dostupno na: https://byjus.com/jee/properties-of-determinants/ (Pristupljeno: 4.7.2020.)

[3.] Hari, V. (2005.) Matematika. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~hari/mat1.pdf (Pristupljeno: 04.07.2020.)

[4.] Ilišević, D. (2014.) Algebra matrica. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/geo/mat1/predavanja.pdf (Pristupljeno: 04.07.2020.)

[5.] Jadrijević, B. (2007.) Sustavi linearnih jednadžbi. Dostupno na: http://marjan.fesb.hr/~borka/files/PRED-4-LA-07.pdf (Pristupljeno: 27.8.2020.)

[6.] Klobučar, A. (2013.) Determinante. Dostupno na: https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p12n.pdf (Pristupljeno: 04.07.2020.)

[7.] Kosor, M. (2016. a) Elementarne transformacije i računanje ranga matrice. Dostupno na: https://www.youtube.com/watch?v=7NkRPvbb5hg&t=158s (Pristupljeno: 4.7.2020.)

[8.] Kosor, M. (2016. b) Linearna zavisnost i nezavisnost vektora. Dostupno na: https://www.youtube.com/watch?v=BifO3qSqEU4 (Pristupljeno: 4.7.2020.)

[9.] Pearsonhighered (2020.) Systems of Linear Equations; Matrices. Dostupno na: https://www.pearsonhighered.com/assets/samplechapter/0/3/2/1/0321947622.pdf (Pristupljeno: 4.7.2020.)

[10.] Radišić, B. (2012.) Matrice. Dostupno na: https://www.vup.hr/_Data/Files/12112291237379.pdf (Pristupljeno: 04.07.2020.)

POPIS SLIKA

Slika 1. Zapis općeg elementa matrice ... 2

Slika 2. Množenje matrice ... 14

Slika 3. Odabir pojedinih opcija ... 53

Slika 4. Postavljanje matrice ... 54

Slika 5. Unos elemenata u matricu ... 55

Slika 6. Prikaz rješenja ... 56

Slika 7. Koraci rješavanja Gauss-Jordanovom metodom ... 57

Slika 8. Množenje matrice ... 58

Slika 9. Postavljanje formata matrice ... 59

Slika 10. Unos elemenata matrice ... 59

Slika 11. Koraci rješavanja Cramerovim pravilom ... 60

Slika 12. Konačno rješenje Cramerovom metodom ... 61

Slika 13. Postavljanje zadatka u OnlineMSchool ... 62

Slika 14. Rješenje Gauss-Jordanovom metodom ... 63

SAŽETAK

Kroz ovaj završni rad upoznali smo se s korištenjem matrica u sustavima linearnih jednadžbi. Tema je obrađena kroz primjere rješavanja zadataka iz svakodnevnog života.

Rad najprije govori općenito o matricama. Navode se vrste matrica, a nakon toga se prikazuju najosnovnije operacije s matricama.

Rad zatim predočava kako funkcioniraju determinante te se govori o njihovim općenitim obilježjima. Prikazani su primjeri determinanti te kako se one izračunavaju ovisno o njihovom redu.

Nakon determinanti slijedi inverz, te elementarne transformacije.

Nakon toga rad prelazi na sustave linearnih jednadžbi gdje se prikazuje kako funkcioniraju Gauss i Gauss-Jordanova metoda eliminacije i Cramerovo pravilo. Zadnje se prikazuju Matrix Reshish i OnlineMSchool aplikacije koje su izvrsne kada želimo računati pomoću matrica jer ispisuju svaki korak.

Rad je koristan i zanimljiv prvenstveno zato jer prikazuje konkretne primjere koji se mogu pojaviti u praksi.

Ključne riječi: primjena matrica, sustavi linearnih jednadžbi, Cramerovo pravilo, Gauss-Jordanova metoda eliminacije, Matrix Reshish, OnlineMSchool, programski alati.

SUMMARY

Through this final paper, we are introduced to the use of matrices in systems of linear equations. The topic is covered through examples of solving tasks from everyday life.

The final paper first talks about matrices in general. The types of matrices are listed, followed by the most basic operations with matrices.

The final paper then presents how the determinants work and discusses their general characteristics. Examples of determinants and how they are calculated depending on their order are presented.

The determinants are followed by the inverse and elementary transformations.

The final paper then moves on to systems of linear equations where the Gauss and Gauss-Jordan elimination method and even the Cramer's rule are shown. Finally, Matrix Reshish and OnlineMSchool applications are presented that are suitable when for computing using matrices as they display every step.

The final paper is useful and interesting primarily because it presents concrete examples that may emerge in practice.

Keywords: matrix application, systems of linear equations, Cramer's rule, Gauss-Jordan elimination method, Matrix Reshish, OnlineMSchool, software tools.