

# Mreže maloga svijeta

---

**Cellich, Massimo**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Pula / Sveučilište Jurja Dobrile u Puli**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:137:479524>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Digital Repository Juraj Dobrila University of Pula](#)



Sveučilište Jurja Dobrile u Puli  
Fakultet informatike u Puli

**Massimo Cellich**

**MREŽE MALOG SVIJETA**

Završni rad

Pula, rujan 2023.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli  
Fakultet informatike u Puli

**Massimo Cellich**

**MREŽE MALOG SVIJETA**

Završni rad

**JMBAG:0016133778, redoviti student**

**Studijski smjer: Informatika**

**Predmet: Matematika 1**

**Znanstveno područje: Prirodne znanosti**

**Znanstveno polje: Informacijske i komunikacijske znanosti**

**Znanstvena grana: Informacijski sustavi i informatologija**

**Mentor: doc.dr.sc. Siniša Miličić**

Pula, rujan 2023.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teorija grafova</b>	<b>4</b>
2.1	Povijest teorije grafova . . . . .	4
2.2	Svojstva i karakterizacija . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Klasteriranje</b>	<b>9</b>
3.1	Connectivity-based ili Hijerarhijsko klasteriranje . . . . .	10
3.2	Centroidno klasteriranje . . . . .	12
3.3	Distribution-based klasteriranje . . . . .	13
3.4	Density-based klasteriranje . . . . .	14
3.5	Koeficijent klasteriranja . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Teorija mreža</b>	<b>17</b>
4.1	Kompleksne mreže . . . . .	19
4.1.1	Scale-free mreže . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Mreže malog svijeta</b>	<b>21</b>
5.1	Robusnost i svojstva . . . . .	21
5.2	Watts-Strogatz model . . . . .	22
5.3	Barabási–Albertov model . . . . .	23
5.4	Primjena mreža maloga svijeta . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Simulacija mreže</b>	<b>26</b>
6.1	Izrada simulacije Watts-Strogatz modela . . . . .	26
6.2	Analiza svojstava Wattz-Strogatz modela . . . . .	33
6.3	Izrada simulacije Barabási-Albertovog modela . . . . .	38
6.4	Analiza svojstva Barabási-Albertovog modela . . . . .	45

6.5	Usporedba simulacija Watts-Strogatz i Barabási–Albertovog modela	49
6.5.1	Inicijalizacija i rast mreže . . . . .	49
6.5.2	Mehanizmi povezivanja . . . . .	50
6.5.3	Rezultati simulacija i opažanja . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Programski kod Watts-Strogatz modela</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Programski kod Barabási-Albertovog modela</b>	<b>55</b>

# Poglavlje 1

## Uvod

Mreže malog svijeta predstavljaju fenomen koji je duboko ukorijenjen u brojne složene sustave koji nas okružuju. Ove posebne mreže, prepoznatljive po visokom koeficijentu grupiranja i kratkoj prosječnoj udaljenosti između čvorova, imaju presudnu ulogu u raznim područjima, od biologije do sociologije.

Otkrivanje ovih karakteristika u mrežama koje susrećemo u stvarnom svijetu potaknulo je intenzivna istraživanja u matematici i fizici. Tradicionalni modeli za stvaranje mreža malog svijeta često se oslanjaju na nasumičnost kako bi postigli željene karakteristike. Međutim, najnovija istraživanja ukazuju na to da uključivanje određenog reda u nasumični graf može također dovesti do formiranja mreža malog svijeta.

Dodatno, mreže malog svijeta često otkrivaju strukture koje se mogu opisati kao zajednice ili klasteri, odnosno regije koje su gusto povezane unutar sebe, ali slabije povezane s ostatkom mreže. Ove strukture su često prisutne u stvarnim mrežama, bilo da su u pitanju društvene, biološke ili tehnološke mreže, i imaju veliki utjecaj na funkcionalnost i dinamiku tih sustava.

Ovaj rad teži produbljivanju razumijevanja karakteristika i posljedica mreža malog svijeta, s posebnim fokusom na njihovu ulogu u području informacijskih tehnologija. Cilj ovog rada je pružiti doprinos našem shvaćanju mreža malog svijeta i njihovog sveobuhvatnog utjecaja na složene sustave.

# Poglavlje 2

## Teorija grafova

Teorija grafova, grana koja je od iznimne važnosti u matematici i informatici, pomogla je riješiti brojne složene probleme u raznim poljima znanosti. Teorija grafova bavi se proučavanjem matematičkih struktura zvanih grafovi koji se koriste za modeliranje struktura relacija između objekata unutar skupova. Graf se u ovom slučaju odnosi na skup čvorova (ili vrhova) zajedno sa skupom rubova (ili lukova). Rubovi povezuju vrhove i stvaraju relacije među njima.

### 2.1 Povijest teorije grafova

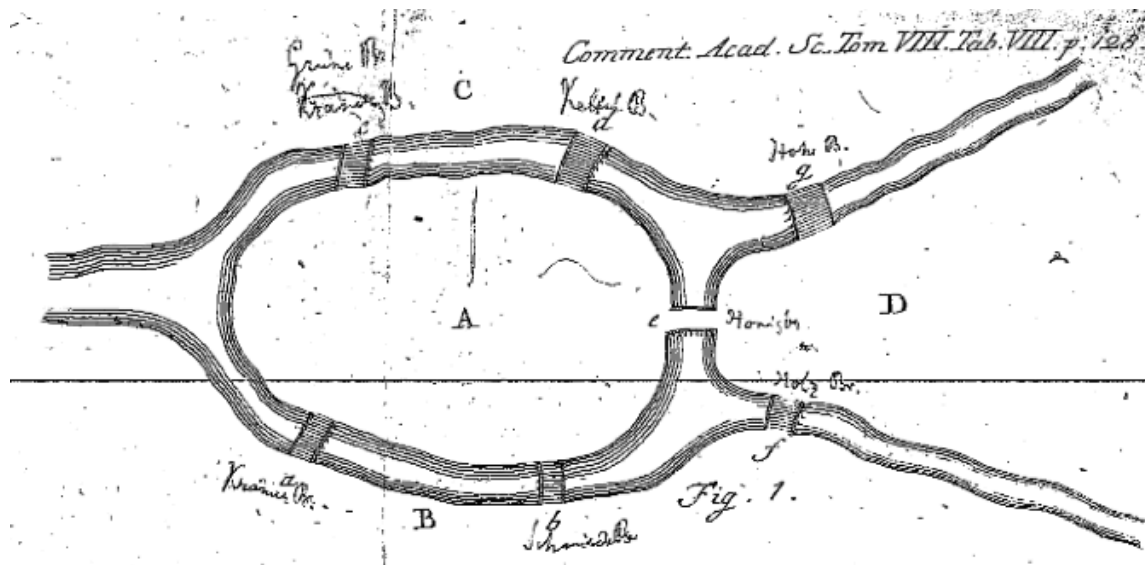
Porijeklo teorije grafova seže u 18. stoljeće, točnije 1736. godinu kada je Švicarski matematičar Leonhard Euler riješio problem Sedam Mostova Königsberg-a (eng. „Seven Bridges of Königsberg“). Grad Königsberg u Prusiji (sada Kalinjingrad, u Rusiji) protezao se s obje strane rijeke Pergel. U gradu su se nalazila dva otoka na rijeci koja su povezana s kopnom putem 7 mostova. Problem koji je predstavljen je šetnja kroz grad koja će prijeći svaki most jednom i isključivo jednom. Euler je dokazao da je takva šetnja nemoguća [Euler, 1736] i time postavio temelje za teoriju grafova.

Rad Leonharda Eulera označio je početak teorije grafova kao samostalne matematičke discipline. Njegove ideje su generalizirane i dalje razvijane vodeći prema bogatom i raznovrsnom polju sa širokim spektrom teoretske i praktične primjene.

Rješenje problema sedam mostova temeljeno je na konceptu „stupnja“ vrha što označava broj rubova koji su mu incidentni. Proučavajući problem uočio je potreban uvjet za šetnju koji zahtjeva da svaki vrh ima jednak stupanj.

Ovaj jednostavan zaključak je jedan od najranijih rezultata u teoriji grafova i

nastavlja biti temeljni koncept u teoriji grafova.



Slika 2.1: Prikaz Eulerovog problema 7 mostova Königsberga, izvor: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem>

## 2.2 Svojstva i karakterizacija

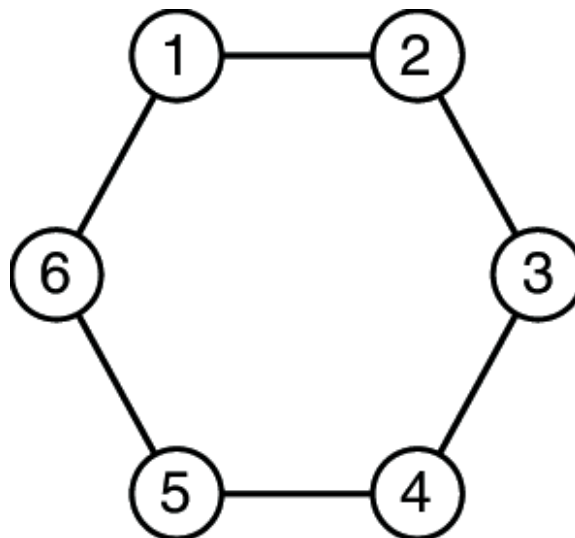
U grafovima vrhovi predstavljaju entitete dok rubovi predstavljaju relacije ili konekcije između entiteta. U sociološkim mrežama individue su prikazane vrhovima dok su njihovi odnosi i interakcije prikazane rubovima ili lukovima. Korištenjem ovog jednostavnog koncepta teorije grafova možemo riješiti mnogobrojne probleme u raznim područjima.

Prema [Trudeau, 1993] grafovi se mogu klasificirati na mnogo načina, postoje usmjereni i neusmjereni, ponderirani i neponderirani, ciklični i aciklični, jednostavni i složeni grafovi. Usmjereni grafovi ili digrafi su grafovi u kojima rubovi ili lukovi imaju orijentaciju odnosno idu od jednog vrha do drugog. Suprotno tome neusmjereni grafovi nemaju orijentaciju. Ponderirani grafovi povezuju težine (ili troškove) sa svakim rubom. Te vrijednosti mogu predstavljati količine poput udaljenosti, kapaciteta i slično ovisno o problemu koji pokušavamo riješiti.

Teorija grafova uključuje razne koncepte i tehnike. Jedan od osnovnih koncepta je pojam puta koji označava sekvencu vrhova takvu da je svaki vrh povezan lukom sa sljedećim vrhom. Ciklus je put koji započinje i završava u istom vrhu



bez ponavljanja vrhova. Graf se smatra povezanim ako postoji put između svakog para vrhova. Ovi koncepti stvaraju temelj mnogih rezultata i algoritama u teoriji grafova.

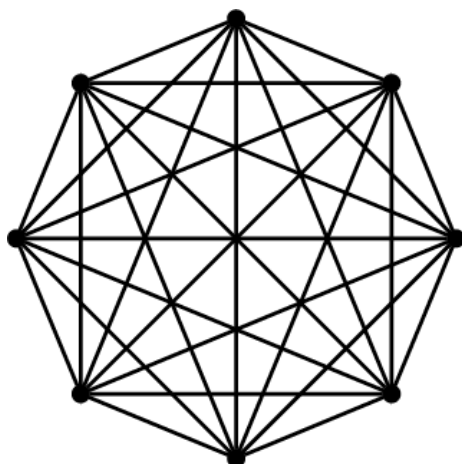


Slika 2.2: Prikaz cikličkog grafa, izvor:

[https://www.researchgate.net/figure/A-drawing-of-a-cycle-graph-where-the-circles-correspond-to-nodes-and-the-lines-to-edges\\_fig1\\_337685909](https://www.researchgate.net/figure/A-drawing-of-a-cycle-graph-where-the-circles-correspond-to-nodes-and-the-lines-to-edges_fig1_337685909)

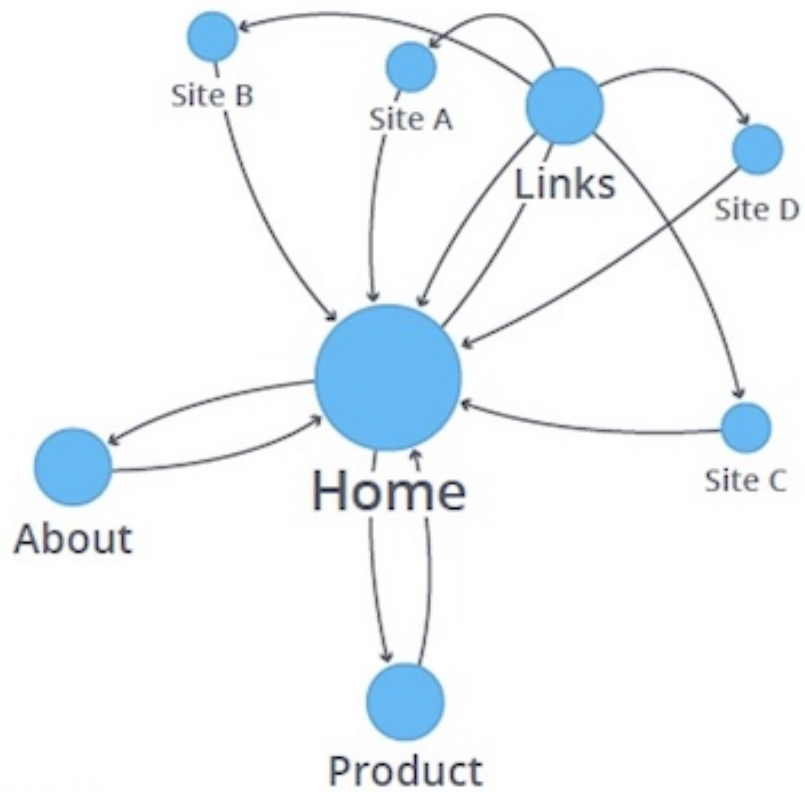
Teorija grafova se također bavi proučavanjem specifičnih vrsta grafova. Kompletan graf je graf koji ima povezan svaki par vrhova. Stablo je povezan graf bez cikličkog ponavljanja. Dvojno podijeljeni graf se sastoji od vrhova koji su podijeljeni u dva disjunktna skupa tako da svaki luk povezuje vrh iz jednog skupa sa vrhom iz drugog skupa. Svaka vrsta grafova ima jedinstvena svojstva i služi kao fokus za razna potpodručja teorije grafova.

Teorija grafova ima svoju primjenu u raznim područjima znanosti poput informatike, fizike, kemije, biologije, operacijskih istraživanja, socioloških znanosti i ostalog. Koristi se u proučavanju molekula u kemiji i fizici, za dizajniranje mrežnih algoritama u informatici, za planiranje ruta u logistici i razumijevanje socioloških mreža u sociologiji. [Singh and Sharma, 2012] [Foulds, 2012] U informatičkim znanostima se teorija grafova koristi za dizajniranje i analizu algoritama, posebno onih koji se bave mrežom i povezanosti. Također se koristi u rudarenju podataka, softverskom inženjeringu i drugim područjima. Jedan od poznatijih algoritama „PageRank“ koji je Google izvorno koristio za rangiranje web stranica u rezultatima svoje tražilice temelji se na modelu teorije grafova weba kao usmjerenog grafa [Andersen et al., 2007].



Slika 2.3: Prikaz kompletnog grafa sa 8 vrhova, izvor:  
[https://www.researchgate.net/figure/Complete-graph-with-8-vertices-K-8\\_fig1\\_318560316](https://www.researchgate.net/figure/Complete-graph-with-8-vertices-K-8_fig1_318560316)

Teorija grafova je moćan matematički alat koji ima širok spektar primjene. Sposobnost teorije grafova modeliranja složenih sustava i rješavanja problema učinila ju je nezamjenjivim dijelom matematičkih i inženjerskih znanosti.



*Visualization of PageRank*

Slika 2.4: Vizualizacija "PageRank" algoritma, izvor: <https://neo4j.com/blog/graph-algorithms-neo4j-pagerank/>

# Poglavlje 3

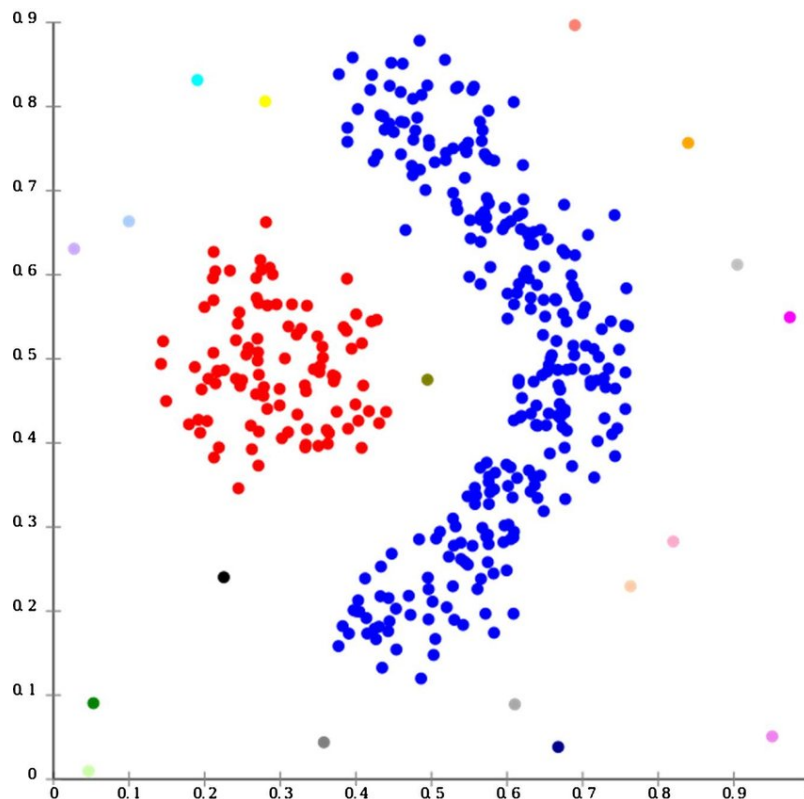
## Klasteriranje

U širokom području analize podataka i prepoznavanja uzoraka pojam „klasteriranje“ (eng. „Clustering“) često se pojavljuje kao pojam od velike važnosti. No, što je točno klasteriranje i zašto je tako važno u različitim domenama? Pojam „klaster“ (eng. „Cluster“) nije moguće precizno definirati budući da postoje mnogi algoritmi klasteriranja. No, ono što je svima zajedničko, jest skupina podatkovnih objekata. Neki od klaster modela su sljedeći:

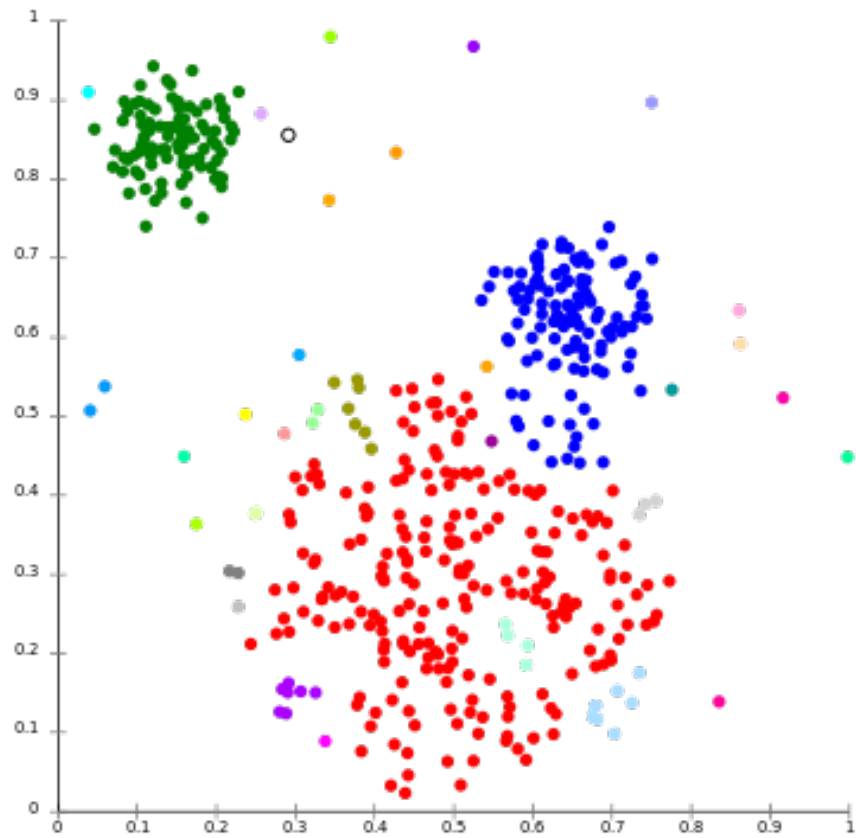
- Modeli povezivanja
- Centroidni modeli
- Modeli distribucije
- Modeli gustoće
- Subspace modeli
- Grupni modeli
- Signed graph modeli
- Neuralni modeli

### 3.1 Connectivity-based ili Hijerarhijsko klasteriranje

Connectivity-based klasteriranje ili hijerarhijsko klasteriranje (eng. „hierarchical clustering”) bazirano je na principu gdje su objekti bolje povezani sa susjednim objektima od onih koji su udaljeni. Prema [Murtagh and Contreras, 2012], jedno od glavnih svojstava klastera je udaljenost koja je potrebna za povezivanje dijelova klastera. Ovisno o udaljenosti, mogu se formirati različite vrste klastera koje se mogu prikazati dendrogramima. Ime hijerarhijsko klasteriranje dolazi od činjenice da se ne stvara jedinstvena skupina podataka, već da postoji složena hijerarhijska skupina klastera koji se spajaju međusobno na određenim udaljenostima. Hijerarhijsko klasteriranje nije otporno na iznimke koje bi se mogle pojaviti kao zasebni klasteri ili čak dovesti do spajanja ostalih klastera. Općenita složenost je  $\mathcal{O}(n^3)$  za aglomerativno klasteriranje i  $\mathcal{O}(2^{n-1})$  za razdvajajuće klasteriranje.



Slika 3.1: Single-linkage na density-based klasteru, izvor: [https://www.researchgate.net/figure/Connectivity-model-in-clustering\\_fig1\\_332053160](https://www.researchgate.net/figure/Connectivity-model-in-clustering_fig1_332053160)

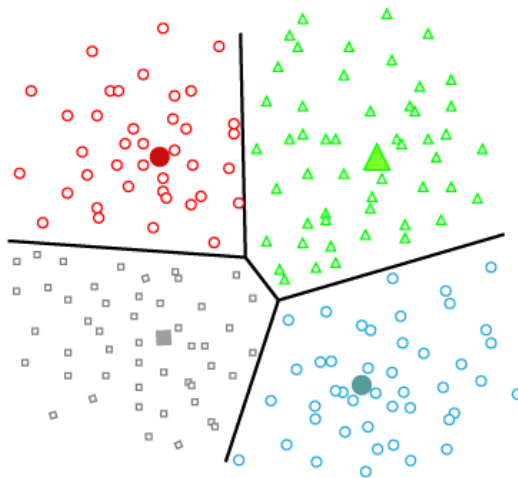


Slika 3.2: Single-linkage na Gaussovima mješavinama, izvor: <https://www.geeksforgeeks.org/different-types-clustering-algorithm/>

## 3.2 Centroidno klasteriranje

Kod centroidnog klasteriranja svaki klaster se predstavlja centralnim vektorom koji nije nužno član seta podataka. Kada postoji broj klastera  $k$ ,  $k$ -means klasteriranje definirano je kao optimizacijski problem: potrebno je pronaći centre  $k$  klastera i podijeliti objekte tako da su najbliži centrima bliskih klastera te da su njihove udaljenosti od klastera minimalne. Zbog svoje težine ovaj problem se rješava traženjem približnih rješenja. Jedan od algoritama za traženje rješenja je Lloydov algoritam. Algoritam se također često naziva samo kao „ $k$ -means algorithm“. Algoritam traži samo lokalni optimum, pa tek kroz nekoliko iteracija sa različitim inicijalizacijama možemo odabrati najbolje rješenje.

Prema [Nerurkar et al., 2018] većina „ $k$ -means“ algoritama zahtjeva da se broj klastera  $k$  definira unaprijed što je veliki nedostatak kod izračunavanja problema optimizacije. Klasteri nad kojima algoritam radi bi trebali biti približno slične veličine jer se u protivnom javlja problem granica ruba klastera, što je razumljivo budući da algoritam rješava optimizacijski problem centra klastera, a ne rubova. „ $K$ -means“ klasteriranje ima nekoliko svojstava, jedno od njih dijeli podatkovni prostor u strukture koje nazivamo Voronojevi dijagrami (eng. „Voronoi diagram“). Također, konceptualno je blizu klasifikacije najbližeg susjeda pa je kao takvo popularno u strojnom učenju. Ova vrsta klastera je veoma slična model-based klasterima.



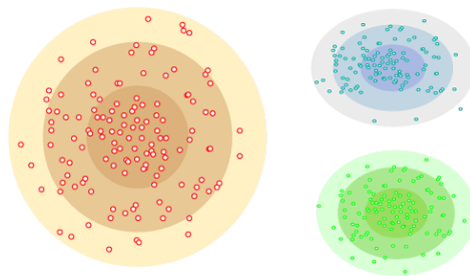
Slika 3.3: K-means kreiranje klastera sa međusobno najbližim centralnim točkama, izvor:

<https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning>

### 3.3 Distribution-based klasteriranje

Ovaj model je najkorišteniji u statistici i baziran je na modelima distribucije. Klasteri u ovom kontekstu promatramo kao objekte koji vrlo vjerojatno pripadaju istoj distribuciji. Važno svojstvo ovog pristupa je vrlo slično načinu na kojem se generiraju umjetni podaci, odnosno uzorkovanjem nasumičnih objekata u distribuciji [Xu et al., 1998]. Ova metoda ima jedan veliki nedostatak, naime prilikom analiza podataka odgovara samo određenom setu podataka, te ukoliko se ne dodaju neka ograničenja, nije u mogućnosti obraditi nove podatke ili predvidjeti buduće ishode pouzdano.

Model Gaussovih mješavina koji koristi algoritam maksimizacije očekivanja modelira set podataka koristeći fiksni broj Gaussovih distribucija koje su nasumično inicijalizirane i čiji su parametri iterativno optimizirani kako bi bolje odgovarali setu podataka. Prema [Zhang et al., 2021] podaci su potom dodijeljeni distribuciji za koju imaju najveću vjerojatnost pripadnosti kako bi se stvorili klasteri. Kompleksni modeli koji nastaju prilikom ove metode mogu sadržavati korelacije i ovisnosti među atributima. Međutim za realno prikupljene podatke, ova metoda često nema definirani matematički model odnosno bazira se na pretpostavkama.



Slika 3.4: Algoritam maksimizacije očekivanja koji koristi Gaussove mješavine, izvor:

<https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning>



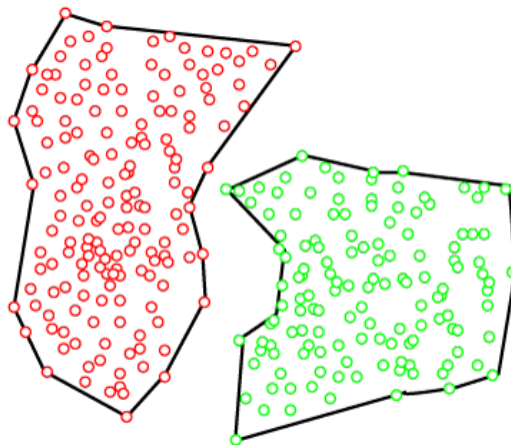
## 3.4 Density-based klasteriranje

Density-based klasteriranje je metoda u kojoj su klasteri definirani kao područja veće gustoće u odnosu na ostatak podataka. Objekti koji se nalaze u područjima manje gustoće nazivaju se šum ili granične točke. Najpoznatiji algoritam density-based klasteringa je DBSCAN.

DBSCAN algoritam je najbrža metoda klasteriranja, međutim upotrebljiv je jedino u primjenama gdje je jasno definirana udaljenost koja se pretražuje. Svi značajni klasteri moraju imati sličnu gustoću. Metoda također omogućava korištenje parametara poput vremenskog polja i intervala pretrage za pronalaženje klastera u prostoru i vremenu. Složenost same metode je vrlo mala – zahtjeva linearni broj upita i vratiti će gotovo identične rezultate za svaku iteraciju [Nerurkar et al., 2018].

Uz DBSCAN, postoji i OPTICS metoda koja je u principu generalizacija samog DBSCAN-a. OPTICS metoda ne zahtjeva parametar dometa te vraća hijerarhijski rezultat povezan sa danim ogrankom klasteringa.

Glavni nedostatak obje metode se nalazi upravo u potrebi za razlikom u gustoći kako bi mogle definirati granice klastera. Kod podatka poput Gaussove distribucije, često se može primijetiti da granice izgledaju dogovorno.



Slika 3.5: Density-based kreiranje klastera prema gustoći čvorova, izvor: <https://tutorialforbeginner.com/clustering-in-machine-learning>

### 3.5 Koeficijent klasteriranja

Kada govorimo o koeficijentu klasteriranja (eng. „Clustering coefficient“) u teoriji grafova, on označava stupanj tendencije povezivanja čvorova u klustere. U mrežama „realnog“ svijeta čvorovi imaju tendenciju povezivanja u usko povezane grupe sa visokom gustoćom veza. Za ovakve vrste veza postoji veća vjerojatnost od nasumičnih veza između dva čvora. Postoje dvije vrste ovog koeficijenta a to su lokalni i globalni. Globalni koeficijent nam govori općenito o koeficijentu klastera unutar mreže, dok lokalni nam daje uvid o koeficijentu klasteriranja čvorova unutar mreže.

Lokalni koeficijent klasteriranja čvora unutar grafa prikazuje koliko su susjedni čvorovi blizu tvorenja kompletnog grafa. Prema [Watts and Strogatz, 1998] mjera je osmišljena 1998. godine kako bi mogli utvrditi jesu li grafovi mreže malog svijeta. Prikazujemo ju kao

$$C_i = \frac{|\{e_{jk} : v_j, v_k \in N_i, e_{jk} \in E\}|}{k_i(k_i - 1)}$$

za usmjerene grafove i kao

$$C_i = \frac{2|\{e_{jk} : v_j, v_k \in N_i, e_{jk} \in E\}|}{k_i(k_i - 1)}$$

za neusmjerene grafove.  $e_{jk}$  predstavlja vezu između čvora  $v_j$  i čvora  $v_k$ ,  $N_i$  predstavlja sve susjede čvora  $v_i$ ,  $E$  predstavlja sve veze unutar grafa dok  $k_i$  predstavlja stupanj čvora  $v_i$ , odnosno broj veza kojima je čvor  $v_i$  povezan.  $k_i(k_i - 1)$  označava maksimalan broj veza koji je moguć unutar grafa među susjedima čvora  $v_i$ . Omjer ove dvije vrijednosti daje proporciju stvarnih veza između susjeda čvora  $v_i$  u odnosu na maksimalni mogući broj veza koje bi mogli imati. Ova vrijednost će biti između 0 i 1, pri čemu 1 ukazuje na to da susjedi čvora  $v_i$  tvore potpuni graf (svi su međusobno povezani), a 0 ukazuje na to da nema veza između njih.

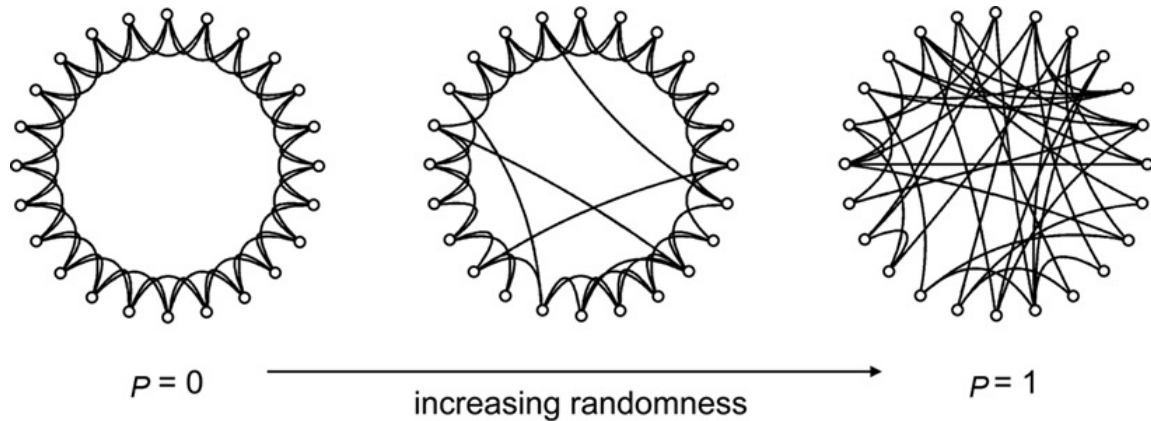
Globalni koeficijent klasteringa možemo definirati kao tri čvora međusobno povezana sa dvije (otvorene trojke) ili tri (zatvorene trojke) veze. Ako uzmemo broj zatvorenih trojki i podijelimo ga sa ukupnim brojem trojki tada dobivamo globalni koeficijent klasteringa. Ova metoda pronalazi koeficijent klasteringa unutar cijele mreže, te se može primijeniti na usmjerene i neusmjerene mreže.

$$C = \frac{3 \times \text{number of triangles}}{\text{number of all triplets}}$$

Prema [Watts and Strogatz, 1998] prosječni koeficijent klasteriranja (eng. „Network average clustering coefficient“) koji nam prikazuje prosječan lokalni koeficijent klasteriranja svih čvorova n.

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$$

Ovim izračunom nije moguće izračunati koeficijent za grafove sa izoliranim čvorovima. Nadalje, mreže sa najvećim mogućim koeficijentom klasteriranja imaju modularne strukture i samim time najkraće udaljenosti među čvorovima.



Slika 3.6: Nasumičnost u Watts-Strogatz modelu, izvor: [https://www.researchgate.net/figure/Algorithm-of-Watts-Strogatz-model-which-can-be-tuned-by-parameter-p-0-1\\_fig1\\_258120851](https://www.researchgate.net/figure/Algorithm-of-Watts-Strogatz-model-which-can-be-tuned-by-parameter-p-0-1_fig1_258120851)

# Poglavlje 4

## Teorija mreža

Kada promatramo teoriju mreža u granama matematike i informatike, teorija mreža je dio teorije grafova. Prema [Borgatti and Halgin, 2011] mreže su grafovi gdje čvorovi i njihove veze posjeduju određena svojstva. Čvorovi predstavljaju entitete dok veze predstavljaju relacije. Dvije glavne metrike u teoriji mreža su stupanj povezanosti i duljina puta. Stupanj povezanosti čvora određuje njegove relacije sa ostalim čvorovima. U usmjerenim mrežama možemo razlikovati ulazni stupanj (odnosno broj dolaznih veza) i izlazni stupanj (broj odlaznih veza). Putem se naziva broj čvorova koji povezuje dva entiteta unutar mreže. Najkraći put se može izračunati koristeći Dijkstrin algoritam, i njemu slične, koji je posebno zanimljiv u mnogim primjenama.

Unutar teorije mreža postoje razne vrste mreža na koje se ova teorija može primijeniti, a neke od njih su:

- Telekomunikacijske mreže
- Transportne mreže
- Društvene mreže
- Biološke mreže
- Prostorne mreže

Primjena same teorije mreža može se pronaći u raznim područjima. Na primjer u društvenim mrežama gdje aplikacije poput Facebook-a i Twitter-a možemo promatrati kao grafove gdje su korisnici čvorovi a interakcije među njima relacije odnosno rubovi. Analiziranjem takvih mreža možemo spoznati društvenu dinamiku, širenje informacija i čak maksimalizaciju utjecaja [Ugander et al., 2011] .

U biologiji pomoću teorije mreža proučavamo reakciju među proteinima, gdje su čvorovi proteini a rubove predstavljaju interakcije. Razumijevanjem ovih mreža dolazimo do važnih informacija poput uvida u stanične funkcije i mehanizme raznih bolesti.[Yann S. and Timothy J., 2012]

U logistici je teorija mreža također veoma važna budući da se može koristiti za kreiranje transportnih ruta, njihovoj optimizaciji i smanjenju prometnog zagušenja.

Internet je također jedna ogromna mreža gdje web stranice predstavljaju čvorove a „hyperlinkovi“ su poveznice među njima. Proučavanjem same strukture interneta dovodi do boljeg usmjerenja podataka i boljeg razumijevanja same njegove dinamike.[Newman, 2003]

Porastom količine podataka i naprednih tehnika izračuna u teoriji mreža javljaju se nekoliko novih trendova. Jedan od njih je proučavanje kompleksnih mreža u kojima interakcije mogu biti različitih tipova.

## 4.1 Kompleksne mreže

Kompleksne mreže u kontekstu teorije grafova su grafovi (mreže) sa složenim topološkim svojstvima. Prema [Newman, 2003] takva svojstva se ne javljaju kod jednostavnih mreža poput mrežastih grafova ili grafova distribucije, već se često javljaju u mrežama koje predstavljaju realne sustave.

Prema [Boccaletti et al., 2006] mnoge kompleksne mreže se javljaju u poljima poput sociologije, biologije i telekomunikacija. Veze unutar tih mreža nisu potpuno regularne niti u potpunosti nasumične. Neke od karakteristika tih mreža su stupanj distribucije, visok koeficijent klasteriranja, asortativnost ili disortativnost između čvorova, struktura zajednice ili hijerarhije. Sve mreže koje smo razmatrali do sada nisu pokazivale ovakva svojstva. Dva vjerojatno najpoznatija modela ovakvih mreža su . scale-free mreže te mreže malog svijeta (eng. „Small-world networks“).

### 4.1.1 Scale-free mreže

Ove mreže karakterizira distribucija stupnja čvora koja se pridržava zakona snage, što znači da vjerojatnost  $P(k)$  da čvor ima  $k$  veza opada kao  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , gdje  $\gamma$  je konstanta koja obično varira između 2 i 3. Prema [Barabasi and Albert, 1999] Ova jedinstvena distribucija rezultira scenarijem u kojem većina čvorova ima samo nekoliko veza, dok nekoliko odabranih, nazvanih centralni čvorovi, dominira mrežom s izuzetno visokim stupnjem povezanosti.

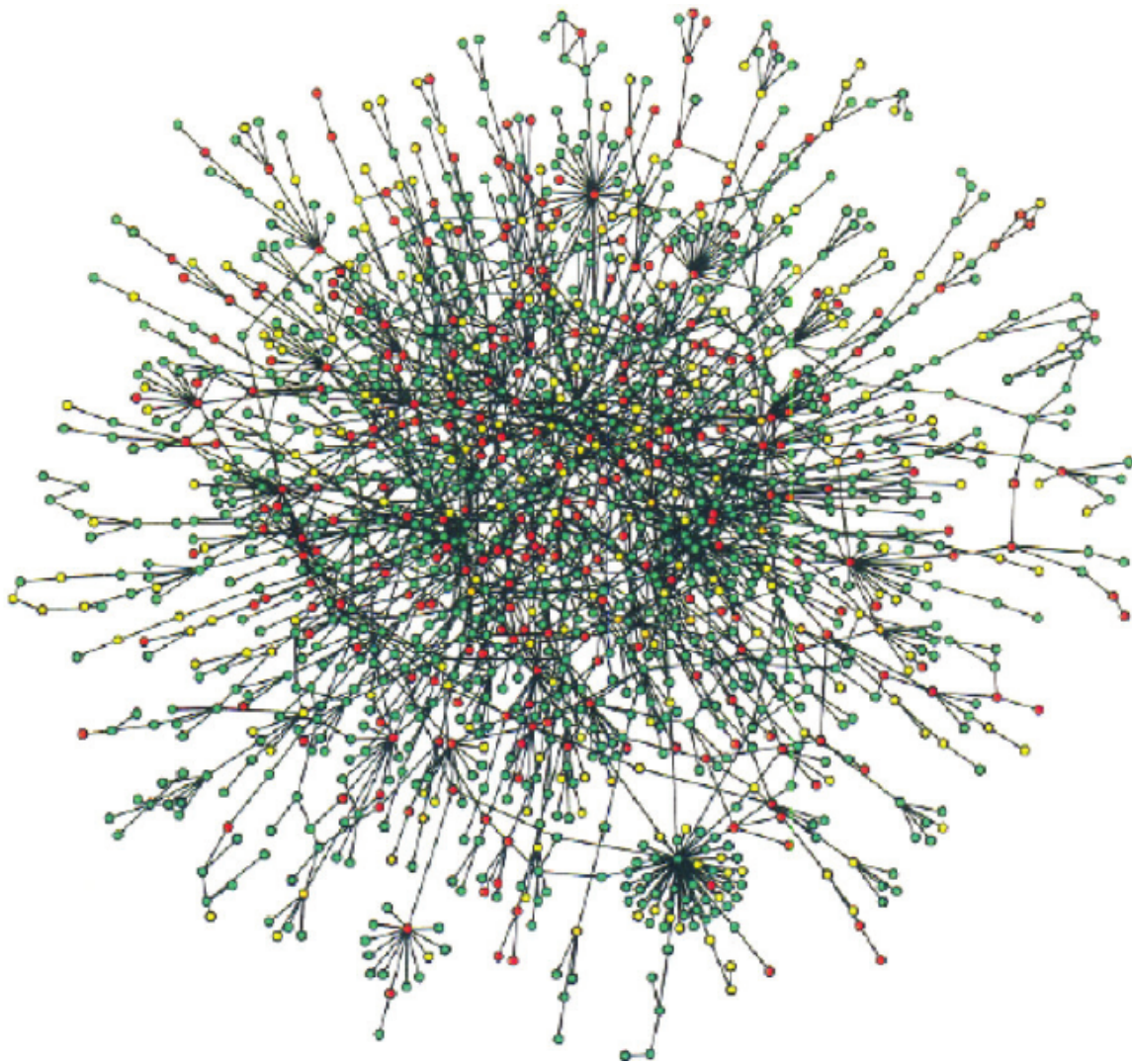
Pojavljivanje scale-free mreža koje može se povezati s konceptom preferencijalnog spajanja. Kako se mreže razvijaju i dodaju novi čvorovi, novi elementi imaju tendenciju povezivanja s čvorovima koji već imaju mnogo veza. Ova tendencija, koja se može opisati kao "bogatiji postaju bogatiji", osigurava da centralni čvorovi nastave dominirati kako mreža raste.

Jedno od najzanimljivijih svojstava scale-free mreža koje je njihova otpornost. Prema [Albert et al., 2000], zbog specifične strukture takve mreže su izuzetno otporne na nasumične prekide čvora. Većina čvorova u mreži ima malo veza, pa njihovo nasumično uklanjanje obično ne utječe značajno na cjelokupnu strukturu mreže. No, iako su ove mreže otporne na nasumične prekide, one su osjetljive na ciljane napade, posebno ako su usmjereni prema centralnim čvorovima. To ističe kontrast između snage i ranjivosti u ovakvim mrežnim sustavima.

Stvarne manifestacije scale-free mreža su brojne i obuhvaćaju više domena. Prema [Barabasi and Albert, 1999] World Wide Web, na primjer, je klasičan primjer

gdje nekoliko web stranica privlači veliku većinu veza. Slično tome, u biološkim sustavima, određeni proteini služe kao centralni čvorovi u mrežama interakcija proteina, igrajući ključne uloge u staničnim funkcijama. Društvene mreže također često pokazuju karakteristike scale-free mreža, s nekoliko pojedinaca (utjecajnih osoba) koji imaju veze s velikim brojem vršnjaka.

Istraživanje scale-free mreža nije samo teoretski zanimljivo, već ima i praktičnu važnost. Razumijevanje jakih i slabih točaka ovih mreža može oblikovati pristupe u područjima kao što su internetska sigurnost, planiranje infrastrukture, kontrola epidemija i distribucija informacija.



Slika 4.1: Primjer scale-free mreže, izvor:  
[https://www.researchgate.net/figure/Example-scale-free-network-representing-interacting-proteins-in-yeast-Baraba-si-and\\_fig1\\_228526623](https://www.researchgate.net/figure/Example-scale-free-network-representing-interacting-proteins-in-yeast-Baraba-si-and_fig1_228526623)

# Poglavlje 5

## Mreže malog svijeta

Mreže malog svijeta poseban su spoj reda i nasumičnosti. Ove mreže koje se mogu pronaći u svemu od socijalnih konekcija do neuralnih puteva, imaju karakteristike koje ih u potpunosti razlikuju od običnih ili nasumičnih mreža. Razumijevanje danih karakteristika je od iznimne važnosti za shvaćanje težine i implikacija mreža malog svijeta u raznim primjenama.

### 5.1 Robusnost i svojstva

Prema [Watts and Strogatz, 1998] jedno od glavnih svojstava mreža malog svijeta je njihov visoki koeficijent grupiranja. Pojednostavljeno, ako su dva čvora povezana sa trećim čvorom onda postoji velika mogućnost da su čvorovi međusobno povezani. Ovo svojstvo rezultira formacijom usko povezanih grupa unutra mreže. Na sociološkom primjeru, ako je Ana Markova i Marijeva prijateljica onda postoji mogućnost da su Marko i Marijo također prijatelji. Ovaj visok stupanj lokalne povezanosti podsjeća na redovne mreže ili rešetke, gdje su čvorovi povezani s njihovim neposrednim susjedima.

Iako se mreža sastoji od usko povezanih grupa ili klastera, mreža malog svijeta prikazuju iznenađujuće malu duljinu puta. To nam govori da bilo koja dva čvora u mreži mogu biti povezana relativno malim brojem koraka. Prema [Watts, 2004] fenomen „Šest stupnjeva separacije“ (eng. „Six degrees of separation“) sugerira da bilo koje dvije individue na planetu mogu biti povezane preko šest ili manje socijalnih konekcija. Postojanje nekoliko veza sa udaljenim čvorovima unutar mreže uvelike smanjuje duljinu puta i osigurava da su čvorovi dostupni ne samo lokalno, već i globalno. .



Mreže malog svijeta postižu ravnotežu između reda i nasumičnosti. One nisu potpuno pravilne (poput rešetki), niti u potpunosti nasumične. Ravnoteža među danim stanjima je ono što ovakve mreže čini u potpunosti posebnim. Prema [Watts and Strogatz, 1998] demonstrirali su da dodavanjem male količine nasumičnosti u rešetkasti oblik mreže može kreirati mrežu malog svijeta. Ovakva ravnoteža osigurava da lokalne grupe ostanu netaknute te da opća mreža ostane povezana. Ovo svojstvo je od iznimne važnosti u mnogim mrežama „realnog“ svijeta.

Robusnost i ranjivost mreža malog svijeta sadrži jedinstvenu kombinaciju. Prema [Zheng-Zhen et al., 2014] robusne su protiv nasumičnih padova sustava što znači da ukoliko uklonimo nasumične čvorove, mreža i dalje ostaje relativno potpuna i funkcionalna. Mreža se tako ponaša iz razloga što uklanjanje nekoliko njezinih čvorova ne utječe na njenu potpunu strukturu. Međutim, mreže ove vrste su ranjive na ciljane napade. Ukoliko su čvorovi koji služe kao ključna čvorišta ili mostovi između klastera napadnuti, tada se mreža ubrzano raspada. Ovo svojstvo ima iznimnu važnost zbog razumijevanja ranjivosti u mrežama realnog svijeta kao što su električne mreže, internetske mreže ili ciljani napadi.

Neke od mreža maloga svijeta kao što su scale-free mreže karakterizirane su prisustvom čvorišta. Prema [Achard et al., 2006] čvorišta su čvorovi koji imaju značajno veći broj konekcija od ostalih čvorova. Takvi čvorovi imaju veoma važnu ulogu u smanjenju duljine puta unutar mreže. Ukoliko promatramo takvu mrežu u kontekstu interneta, platforme poput Google-a i ostalih pretraživača ponašaju se kao čvorišta koja spajaju milijune korisnika i web mjesta.

Mreže malog svijeta su često prikazane strukturama zajednice ili modulima. Prema [Du and Feldman, 2006] to su grupe čvorova koje imaju veći broj konekcija međusobno u odnosu na ostatak mreže. Takve strukture se mogu najlakše uočiti u sociološkim mrežama gdje pojedinci tvore interesne skupine po zajedničkim interesima, zanimanjima ili nekim drugim atributima.

## 5.2 Watts-Strogatz model

Watts-Strogatz model započinje s prstenastom rešetkom gdje je svaki čvor povezan sa svojim najbližim susjedima [Watts and Strogatz, 1998]. Zatim se u model uvodi vjerojatnost 'p' da će svaka veza biti "preusmjerena" prema nasumično odabranom čvoru. Ovaj proces preusmjeravanja premošćuje razliku između redovite

rešetke i nasumične mreže.

Iako je Watts-Strogatz model bio ključan za napredak znanosti o mrežama, nije bez kritika. Neki tvrde da model previše pojednostavljuje složene mreže, posebno jer mreže u stvarnom svijetu često pokazuju svojstva scale-free mreža s čvorovima koji imaju distribuciju stupnja prema zakonu snage. Kao odgovor na to, pojavili su se kasniji modeli, poput Barabási-Albertovog modela, koji se bave tim složenostima.

Watts-Strogatzov model malog svijeta ostavio je neizbrisiv trag u području znanosti o mrežama. Pružajući most između svjetova reda i nasumičnosti, nudi osnovni okvir za razotkrivanje složene mreže veza koje čine naš svijet. Dok nastavljamo razotkrivati tajne kompleksnih mreža, spoznaje iz Watts-Strogatz modela nesumnjivo će služiti kao vodiči na tom putu.

### 5.3 Barabási–Albertov model

Unutar područja mrežne znanosti, Barabási–Albertov (BA) model ističe se kao ključni okvir, osvjetljavajući razvoj i napredak mreža u stvarnom svijetu. Uveden od strane Albert-Lászlóa Barabásija i Réke Albert 1999. godine [Barabasi and Albert, 1999], ovaj model je pojasnio ideju o scale-free mrežama, koncept koji se od tada uspostavio kao temeljni aspekt proučavanja složenih sustava.

Barabási–Albertov model je nastao kao odgovor na ograničenja postojećih modela mreža, posebno Watts-Strogatz modela [Barabási, 2013]. Iako je ovaj posljednji pružio uvide u "malosvijetsku" prirodu mreža, nije mogao objasniti distribuciju stupnja prema zakonu potencija koja se opaža u mnogim stvarnim mrežama. BA model je riješio ovaj problem usredotočujući se na dvije osnovne mehanike: rast i preferencijalno povezivanje. Rast implicira da mreža raste tokom vremena. U Barabási–Albert modelu novi čvorovi se dodaju jedan po jedan. Svaki novi čvor se povezuje sa postojećim čvorovima.

Preferencijalno povezivanje nam sugerira da su novi čvorovi skloniji povezivanju sa postojećim čvorovima koji imaju veliki broj veza. Po principu "bogatiji postaju bogatiji" nastaju čvorovi sa nesrazmjernim brojem veza naspram drugih te ih nazivamo čvorištima.

Prema [Barabási, 2013] najistaknutija značajka mreža generiranih Barabási–Albert modelom je njihovo "scale-free" svojstvo. Distribucija stupnja ovih mreža slijedi zakon potencija što znači da iako većina čvorova ima nekoliko veza i neko-

liko čvorova (čvorišta) ima ogroman broj poveznica. Ova distribucija se razlikuje od nasumičnih mreža gdje većina čvorova ima otprilike isti broj veza.

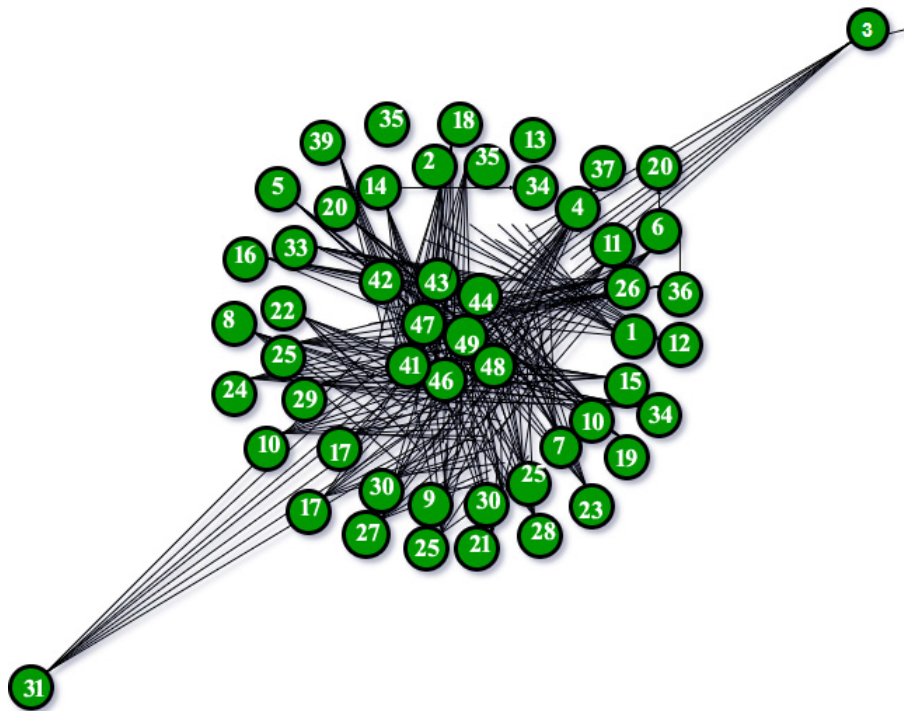
$$P(k) \sim k^{-3}$$

Kod svakog koraka dodaje se jedan novi čvor. Vjerojatnost dodavanja novog čvora  $p_i$  koji je povezan sa čvorom  $i$  je

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

gdje je  $k_i$  stupanj čvora  $i$  i sumirani su svi postojeći čvorovi  $j$ .

Dok je Barabási–Albertov model bio od velikog značaja za razumijevanje mreža stvarnoga svijeta, postoje određeni nedostaci koji su primijećeni. Naime, daljnjim proučavanjem mreža znanstvenici su zaključili da je i ovaj model previše jednostavan za prikazivanje svih složenosti mreža stvarnoga svijeta te kao odgovor na ovaj model nastali su daljnji složeniji modeli koji prikazuju složenije značajke stvarnih mreža.



Slika 5.1: Barabási–Albert model, izvor: <https://www.geeksforgeeks.org/barabasi-albert-graph-scale-free-models/>

## 5.4 Primjena mreža maloga svijeta

Mreže malog svijeta možemo pronaći u mnogim realnim sustavima. Budući da su prisutne kako u prirodnim tako i u ljudskim kreacijama, postale su predmetom istraživanja u različitim znanstvenim granama. Njihove primjene možemo razmatrati u raznim granama poput fizike, neuroznanosti, prometnih sustava, i neuralnih mreža mozga.

U području fizike, mreže malog svijeta proučavane su kako bi se razumjela dinamika generaliziranih Gaussovih struktura. Studija pod nazivom "Laplacian spectra of a class of small-world networks and their applications" [Liu et al., 2015] predstavlja obitelj mreža malog svijeta i istražuje njihove Laplaceove svojstvene vrijednosti. Ovo istraživanje je posebno značajno zbog uvida u relaksacijsku dinamiku i depolarizaciju fluorescencije pod kvazirezonantnim prijenosom energije. Takvi nalazi ističu potencijal mreža malog svijeta u produbljivanju našeg razumijevanja složenih fizičkih sustava i njihove dinamike.

Složena mreža neuronskih veza u mozgu pokazuje svojstva koja podsjećaju na mreže malog svijeta. Rad "Koeficijent malog svijeta  $4,8 \pm 1$  optimizira obradu informacija u 2D neuronskim mrežama" [Aprile et al., 2022] kvantitativno procjenjuje učinkovitost mreža malog svijeta u 2D neuronskim modelima. Istraživanje ističe značaj koeficijenta malog svijeta u optimizaciji komunikacije unutar neuronskih mreža, pružajući dublje razumijevanje obrade informacija u mozgu.

Globalna mreža zračnih linija, koja obuhvaća složene rute diljem kontinenata, može se analizirati kroz koncept mreža malog svijeta. U istraživanju pod nazivom "Hijerarhijsko oblikovanje višezvezdastih mreža malog svijeta za praktične primjene" [Sawai, 2014] uvodi novi koncept mreže malog svijeta nadahnut ponašanjem kolonija mrava. Ovo istraživanje nudi hijerarhijski pristup strukturi zračne mreže temeljen na n-Star modelu. Smatra se da bi ovakav model mogao biti bolje prilagođen stvarnim potrebama i mogao bi donijeti značajne promjene u strukturi globalnih zračnih linija.

Iza detaljnih neuronskih veza, šira struktura mreža u mozgu također odražava karakteristike mreža malog svijeta. U svom radu pod nazivom "Neujednačena koherentna stanja u mrežama malog svijeta: Primjena na neuronske mreže" [Gadjiev and Progulovala, 2018] analiziraju dinamiku procesa u mrežama malog svijeta koje imaju distribuciju stupnja baziranu na zakonu potencija. Njihovo istraživanje nudi dublji uvid u mehanizme koji stoje iza funkcioniranja uma, interpretirajući procese unutar mozga kroz prizmu dinamike mreža malog svijeta.

# Poglavlje 6

## Simulacija mreže

Da bi lakše razumjeli raspravljane teme napraviti ćemo jednu kratku simulaciju mreže malog svijeta. Za simulaciju smo odabrali razvojno okruženje R studio i programski jezik R. R studio je razvojno okruženje za programski jezik r koji se koristi za statističke izračune i izradu grafova. Podržava mnoge dodatne pakete pa tako i iGraph koji smo koristili za izradu naše simulacije.

### 6.1 Izrada simulacije Watts-Strogatz modela

Za početak možemo koristeći igraph paket definirati jednostavnu mrežu sa jednom vezom:

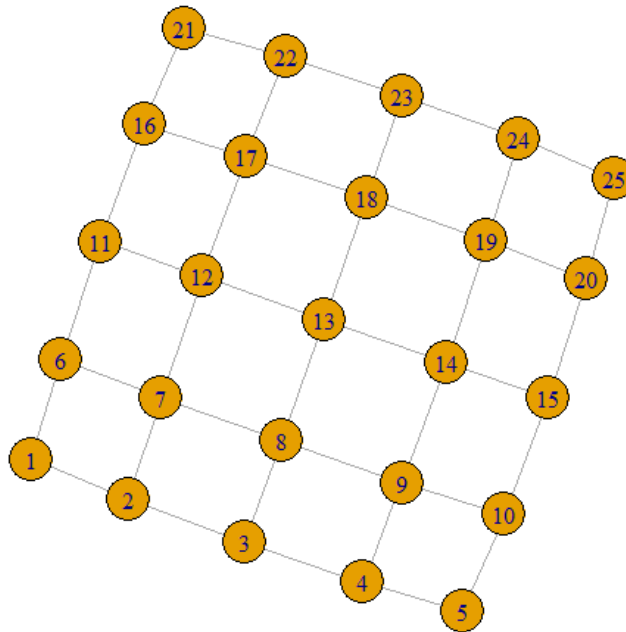


Slika 6.1: Jednostavan graf čvorova sa jednom vezom

```
1 library(igraph)
2 g <- graph.lattice(5)
3 plot(g, layout=layout.grid(g,width = 5))
```

Brojevi u zagradama su brojevi čvorova, koji su jedan od parametara koji su nam potrebni za našu simulaciju. Kod ove mreže vidimo da je 5 čvorova povezano jednostrukim vezama, linearno su raspoređeni jedan za drugim prema zadanom rešetkastom rasporedu `layout.grid`. No ako izmijenimo `g <- graph.lattice(5)` i umjesto samo 5 zadamo parametar `c(5,5)`, dobivamo rešetkastu mrežu s 25 čvorova.

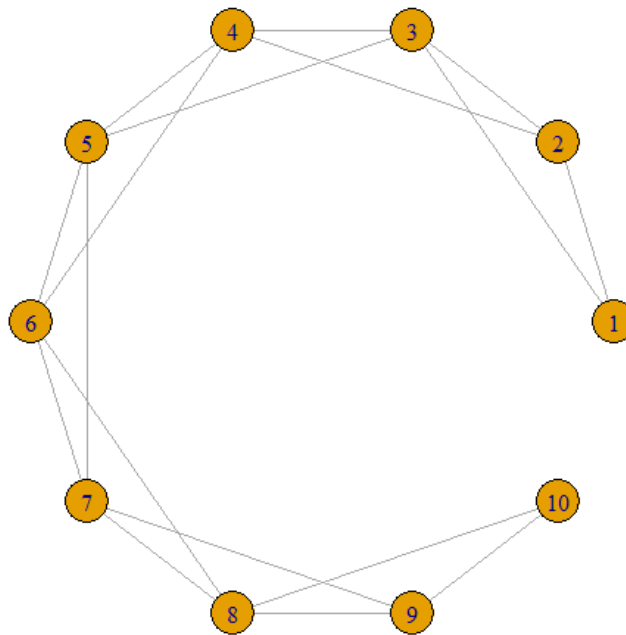
```
1 plot(graph.lattice(c(5,5))).
```



Slika 6.2: Prikaz rešetkastog grafa čvorova

Graf u ovom slučaju prikazuje čvorove povezane s jednim susjednim čvorom u svakom smjeru. Broj susjeda (`nei`) je druga varijabla koju uvodimo kako bi mogli manipulirati s brojem susjeda svakog čvora unutar simulacije. Nadalje, prema Watts-Strogatzovom modelu, model mreže je okrugao, pa moramo promijeniti strukturu mreže unutar našeg koda za iscrtavanje. Dodajemo sljedeće naredbe:

```
1 g <- graph.lattice(10, nei=2)
2 plot(g, layout=layout.circle)
```



Slika 6.3: Prikaz kružnog grafa čvorova

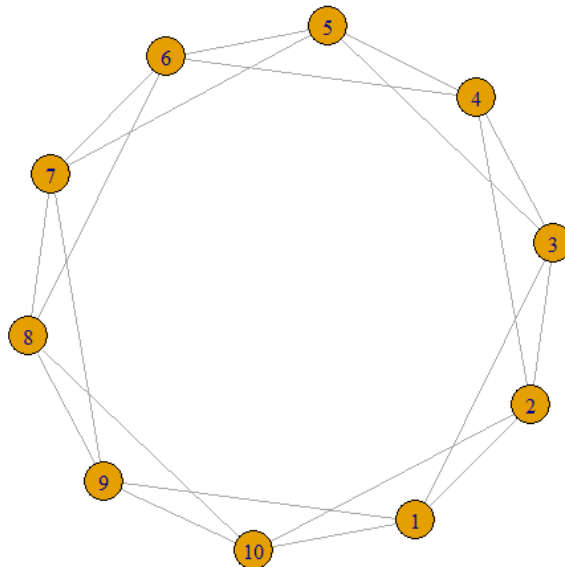
Dobiveni rezultati već pomalo liče na model koji pokušavamo dobiti. No primjećujemo da nam izostaje još jedan parametar koji je iznimno važan u modelu mreža malog svijeta a to je vjerojatnost stvaranja novih veza ( eng. „rewire possibility“ ). U ovom trenutku nam paket `igraph` omogućava korištenje ugrađenog modela koji se zove „`watts.strogatz.game`“. Ugrađeni model zahtjeva 4 parametra:

1. Dimenziju – broj koji određuje dimenzije početnog grafa.
2. Broj čvorova – koliko će čvorova naš model sadržavati.
3. Broj susjeda – s koliko čvorova će svaki čvor unutar modela biti povezan.
4. Vjerojatnost stvaranja novih veza – vjerojatnost između 0 i 1 o kojoj ovisi stvaranje novih veza.

Dakle sljedeći kod nam je:

```
1 g <- watts.strogatz.game(dim=1,size=10,nei=2, p=0)
2 plot(g)
```

Kad primijenimo sve što smo definirali dobijemo:



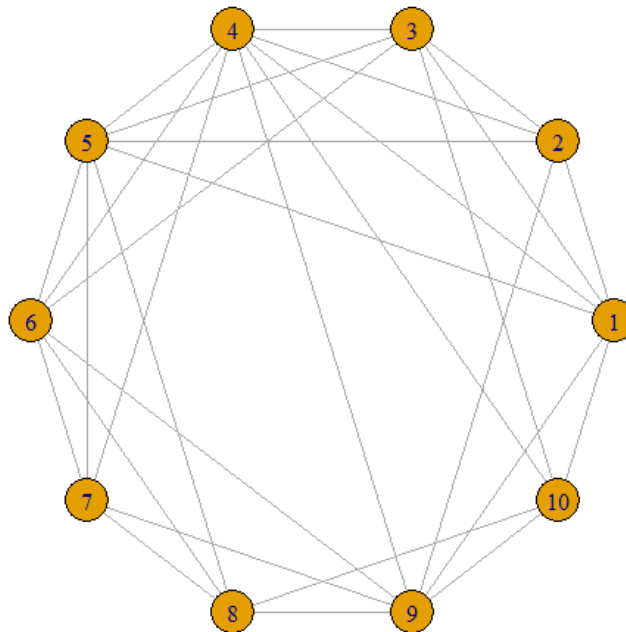
Slika 6.4: Watts-strogatz model 1



No, ako promijenimo  $p$  (vjerojatnost stvaranja novih veza) model nam više nije kružni, pa to moramo dodatno definirati:

```
1 g <- watts.strogatz.game(dim=10,size=10,nei=3, p=0.5)
2 plot(g, layout = layout.circle)
```

Tu smo u principu dobili model mreže malog svijeta:



Slika 6.5: Watts-strogatz model 2

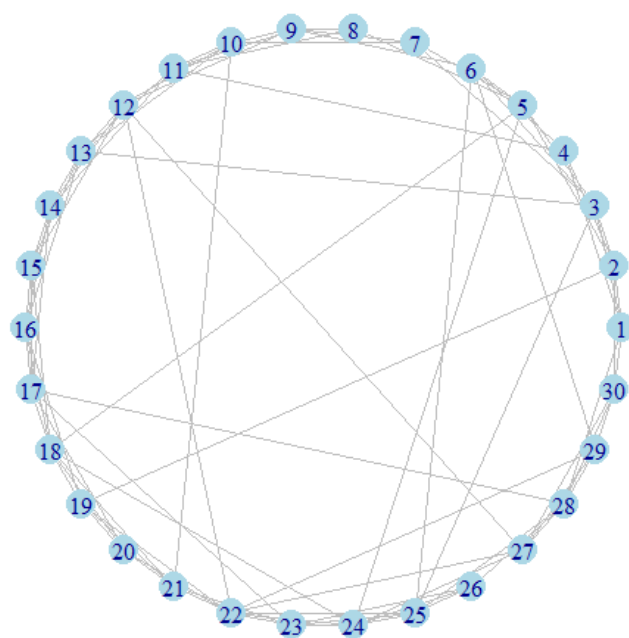
Dodajemo još dio koda za oblikovanje samog grafa. Naime postoji mogućnost pojavljivanja petlji a to ne želimo pa dodajemo i `loops = FALSE` parametar. Određujemo još i veličinu i boju prikaza čvorova:

```
1   # Funkcija za generiranje mreza malog svijeta
2 generate_small_world <- function(broj_cvorova, broj_susjeda,
3   vjeroj_stv_v) {
4   g <- watts.strogatz.game(1, broj_cvorova, broj_susjeda, vjeroj_
5     stv_v, loops=FALSE)
6   V(g)$color <- "lightblue"
7   E(g)$color <- "gray"
8   V(g)$label <- 1:vcount(g)
9   return(g)
10 }
11
12 # Funkcija za iscrtavanje mreze
13 plot_network <- function(g, layout = layout_in_circle(g), vertex_
14   size = 10) {
15   plot(g, layout = layout, vertex.size = vertex_size, vertex.
16     frame.color = NA,
17     edge.arrow.size = 0.5, main = "Watts-Strogatz model mreze
18     maloga svijeta")
19 }
```

Odredimo da nema okvira grafa, zadržavamo kružni izgleda grafa. Veličinu čvorova smo postavili na 10 i dodali naslov modela.

Tada dobijemo sljedeći izgled modela:

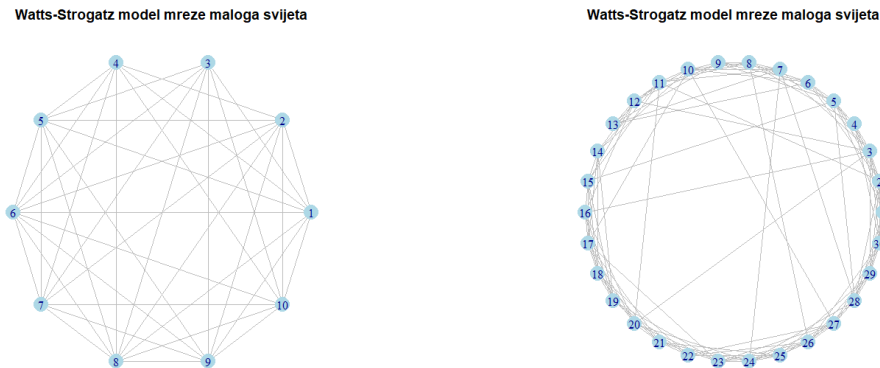
### Watts-Strogatz model mreže malog svijeta



Slika 6.6: Watts-strogatz finalni model

## 6.2 Analiza svojstava Watts-Strogatz modela

Na temelju izrađene simulacije možemo analizirati neka od svojstava Watts-Strogatz modela mreže malog svijeta. Prvo možemo vidjeti da s povećanjem broja čvorova raste i broj klastera i veza među njima. Ako promatramo model s 10 čvorova i model s 30 jasno su vidljive razlike među njima.

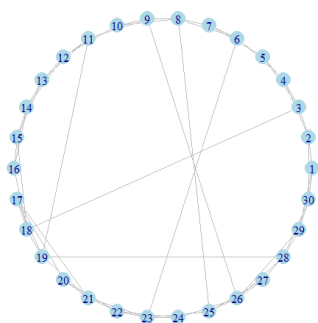


Slika 6.7: Watts-strogatz model sa 10 i 30 čvorova.

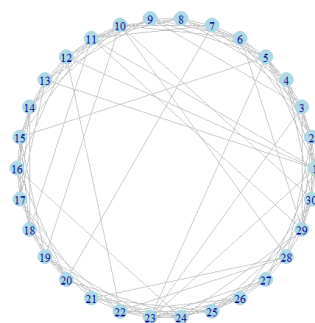
Budući da smo samo smanjili broj čvorova, a broj susjednih čvorova i vjerojatnost stvaranja novih veza su ostali isti, vidljivo je da model s manjim brojem čvorova ima veći broj veza između međusobno udaljenih čvorova, dok kod modela s većim brojem čvorova je vjerojatnost tog događaja mnogo manja.

Vrlo sličan rezultat dobivamo i smanjenjem broja susjednih čvorova, naime ako svaki čvor ima tendenciju povezivanja sa samo dva čvora tada je neizbježno imati manji broj veza, čak i s udaljenim čvorovima.

Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



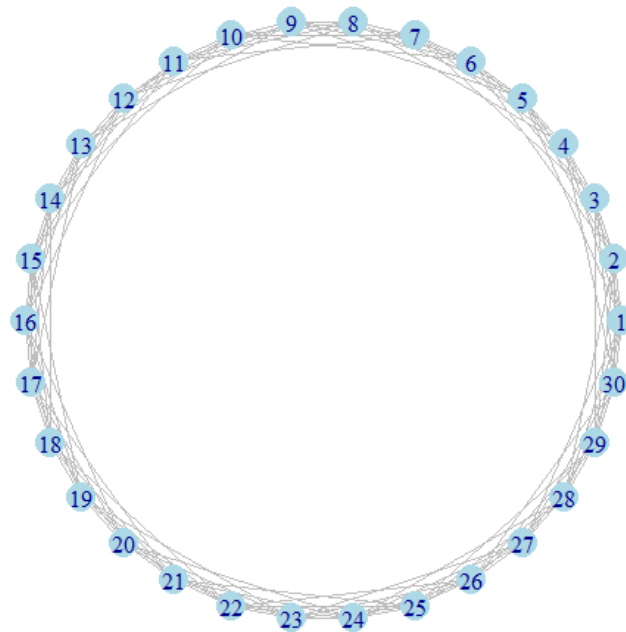
Slika 6.8: Watts-strogatz model sa 2 i 4 susjedna čvora.

Kad se broj susjednih čvorova udvostruči tada je neizbježno i povećanje veza s udaljenim čvorovima.

Prema [Watts and Strogatz, 1998] ukoliko promijenimo koeficijent vjerojatnosti stvaranja novih veza dobiti ćemo nasumične veze između čvorova unutar grafa. Dok je koeficijent nula ili približan nuli ne postoji puno veza s udaljenim čvorovima.

Prikaz modela s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0:

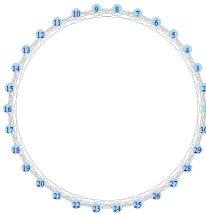
### Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



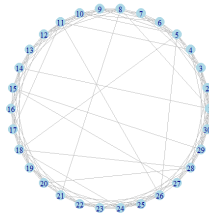
Slika 6.9: Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0.

Kada povećavamo koeficijent tako i broj nasumičnih veza jednako raste:

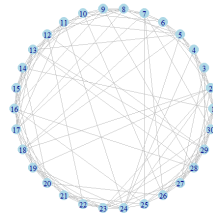
Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



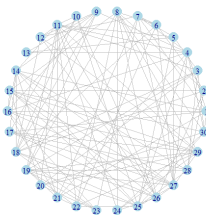
Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



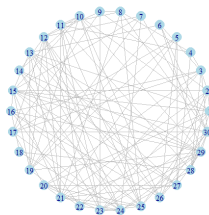
Slika 6.10: Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0.05 do 0.2

Kako se koeficijent nalazi  $0 < p < 1$ , kada se približavamo gornjoj granici, tada se izgled modela drastično mijenja:

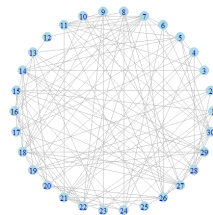
Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta

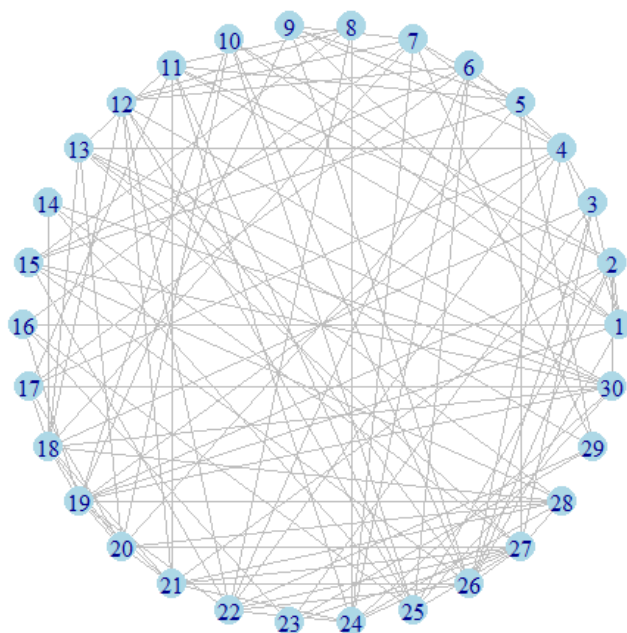


Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



Slika 6.11: Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0.7 do 0.9

### Watts-Strogatz model mreže maloga svijeta



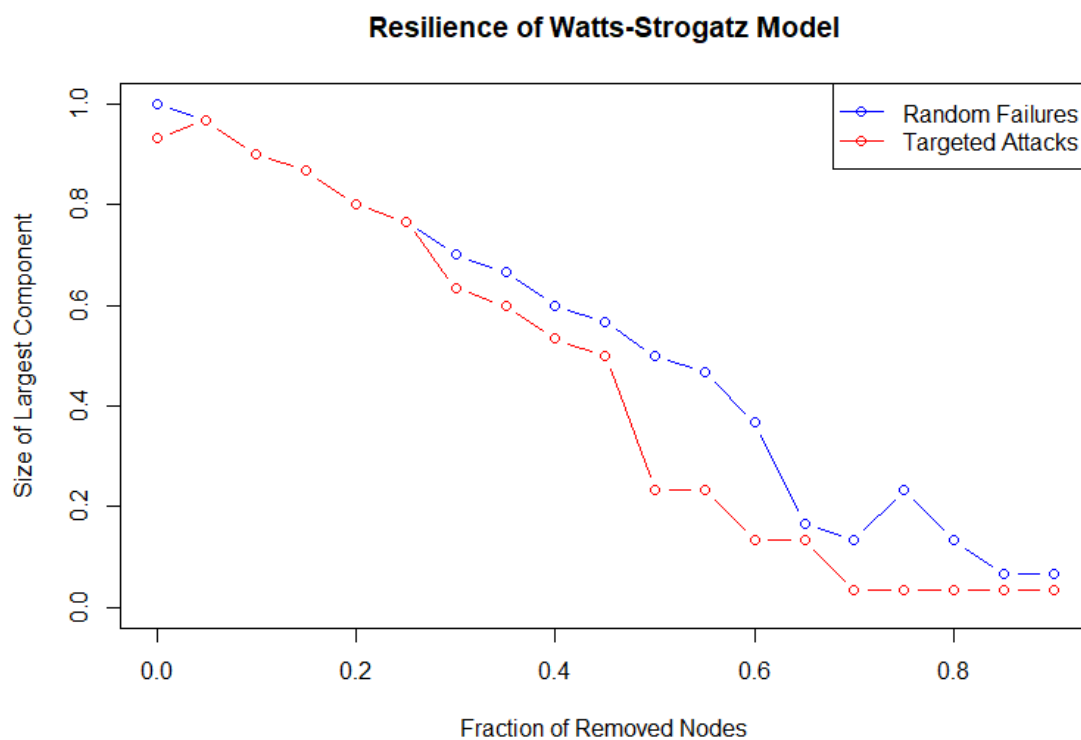
Slika 6.12: Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 1



Što se više približavamo gornjoj granici možemo primijetiti da su veze unutar modela više usmjerene prema udaljenim čvorovima umjesto prema susjednim čvorovima.

Upravo je ovo glavno svojstvo mreža malog svijeta koje nam govori kako u strukturiranoj mreži s malim koeficijentom stvaranja novih veza dodavanjem samo male količine nasumičnosti, smanjuje se udaljenost između udaljenih čvorova u mreži.

Robusnost same mreže možemo prikazati sljedećim dijagramom:



Slika 6.13: Dijagram robusnosti Watts-Strogatz modela

Iz sljedećeg grafa možemo zaključiti da je otpornost na nasumične ispade čvorova iz mreže i ciljane napada vrlo dobra.

### 6.3 Izrada simulacije Barabási-Albertovog modela

Izradu simulacije započinjemo izradom funkcije za generiranje samog modela. Prvo nam je potrebna jednostavna mreža  $n$  čvorova sa  $m$  veza.

```

1 # Funkcija za generiranje Barabási-Albertovog (BA) grafa
2 generate_BA <- function(n, m) {
3
4   # Kreiranje praznog grafa s 'm' čvorova
5   g <- graph.empty(n = m, directed = FALSE)
6
7   # Povezivanje svih 'm' čvorova međusobno kako bi se formirala
8     čpoetna žmrea
9   g <- graph.full(n = m, directed = FALSE)
10
11  # Dodavanje novih čvorova u graf
12  for (new_node in seq(m + 1, n)) {
13
14    # Izračunavanje vjerojatnosti za svaki postojeći čvor
15      temeljeno na njegovom stupnju
16    prob <- degree(g) / sum(degree(g))
17
18    # Odabir 'm' čvorova temeljeno na njihovoj vjerojatnosti (
19      preferencijalno povezivanje)
20    selected_nodes <- sample(V(g), size = m, prob = prob, replace
21      = FALSE)
22
23    # Dodavanje novog čvora u graf
24    g <- add_vertices(g, 1)
25
26    # Povezivanje novog čvora s odabranim čvorovima
27    g <- add_edges(g, c(rbind(rep(new_node, m), selected_nodes)))
28  }
29
30  # Povrat generiranog grafa
31  return(g)
32 }

```

Zatim postavljamo parametre koje želimo koristiti. Potrebno je postaviti broj čvorova  $n$  i broj veza  $m$ :

```

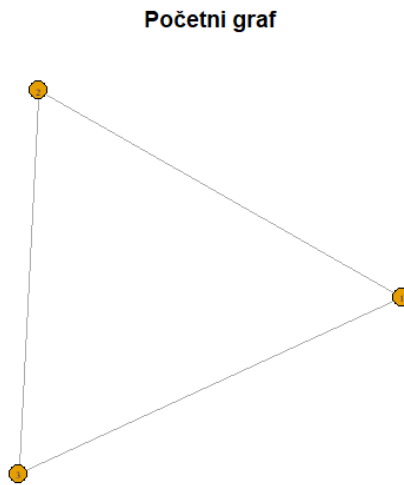
1 # Postavljanje parametara
2 n <- 100 # Ukupan broj čvorova

```

```
3 m <- 3 # Broj veza od novog čvora do čpostojeh čvorova
```

Potom možemo iscrtati početni graf:

```
1 BA_graph <- graph.full(n = m, directed = FALSE)
2 plot(BA_graph, vertex.size = 10, vertex.label.cex = 0.5, main = "
  čPoetni graf")
```



Slika 6.14: Početni graf Barabási-Albertovog modela

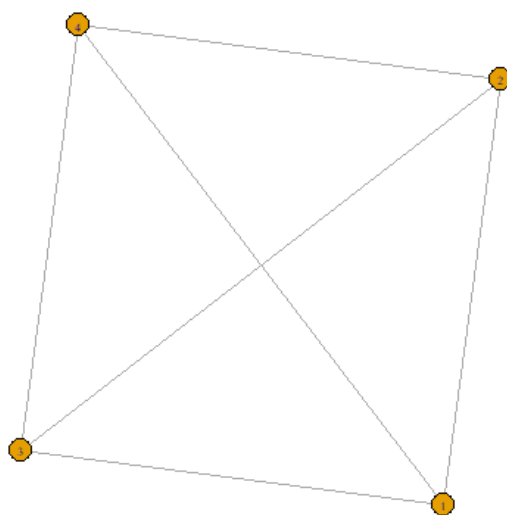
Nakon što smo dobili početni graf kojim ćemo dodavati čvorove, možemo dodati prvi čvor:

```
1 BA_graph <- generate_BA(m + 1, m)
2 plot(BA_graph, vertex.size = 10, vertex.label.cex = 0.5, main = "
  Nakon dodavanja prvog čvora")
```

Sada vidimo kako nam graf izgleda nakon dodavanja prvog čvora. Kako smo dodali prvi čvor ako nastavimo s dodavanjem još 5 čvorova, dobiti ćemo sljedeći izgled grafa:

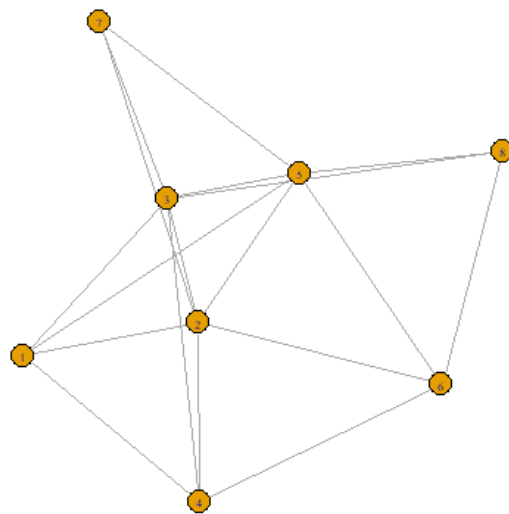
```
1 BA_graph <- generate_BA(m + 5, m)
2 plot(BA_graph, vertex.size = 10, vertex.label.cex = 0.5, main = "
  Nakon dodavanja šjo 5 čvorova")
```

**Nakon dodavanja prvog čvora**



Slika 6.15: Graf Barabási-Albertovog modela nakon dodavanja prvog čvora

**Nakon dodavanja još 5 čvorova**

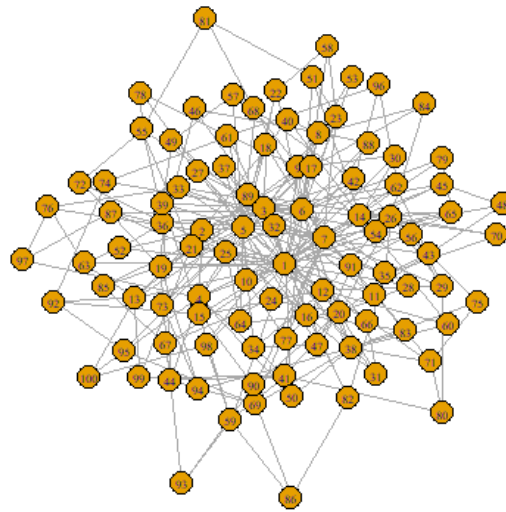


Slika 6.16: Graf Barabási-Albertovog modela nakon dodavanja još 5 čvorova

Sada kada znamo postupak možemo pokrenuti generiranje simulacije sa  $n$  parametrom koji smo unaprijed odredili:

```
1 BA_graph <- generate_BA(n, m)
2 plot(BA_graph, vertex.size = 10, vertex.label.cex = 0.5, main = "
  čKonana mreža")
```

**Konačna mreža**

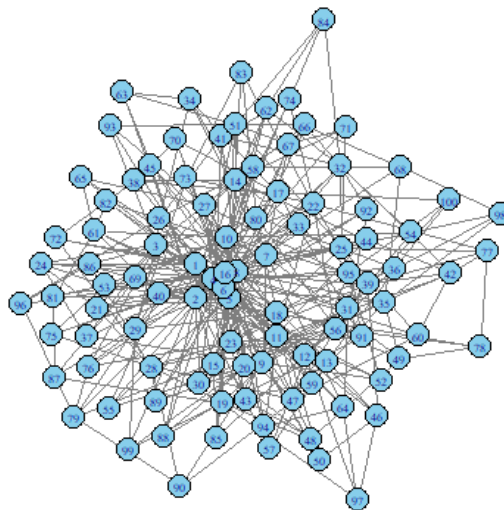


Slika 6.17: Konačni graf Barabási-Albertovog modela

I još možemo dodati vizualne atribute za uljepšavanje samog grafa i onda dobivamo:

```
1 plot(BA_graf ,
2     vertex.size = 10,
3     vertex.label.cex = 0.5,
4     vertex.color = "skyblue",
5     edge.color = "gray50",
6     main = "-BarabásiAlbert Model",
7     layout = layout_fruchterman_reingold)
```

**Barabási–Albert Model**



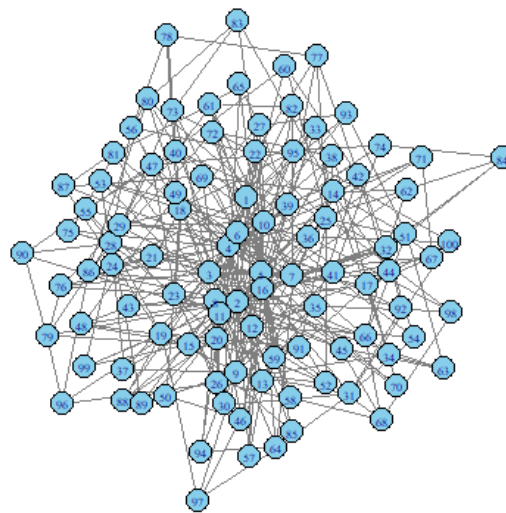
Slika 6.18: Uređeni graf Barabási-Albertovog modela

Sada imamo gotovu simulaciju Barabási-Albertovog modela.

## 6.4 Analiza svojstva Barabási-Albertovog modela

Analizu svojstva možemo započeti sa stupnjem distribucije, prvo možemo prikazati dobiveni model.

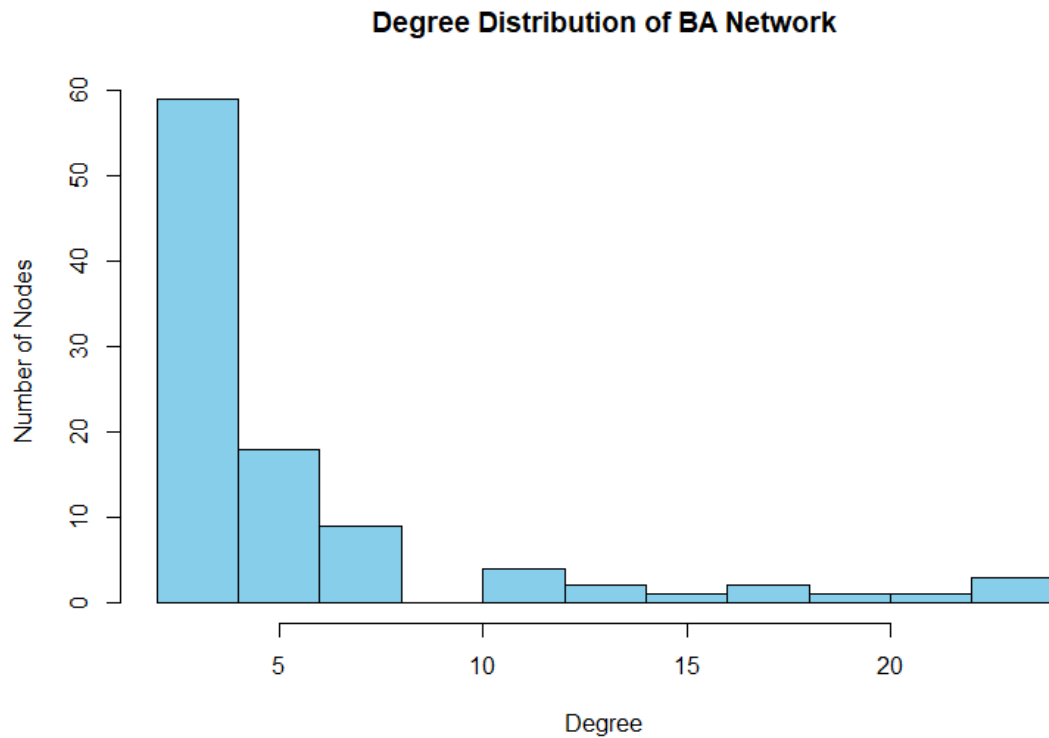
**Barabási–Albert Model**



Slika 6.19: Prikaz Barabási-Albertovog modela za analizu



Potom imamo histogram stupnja distribucije:

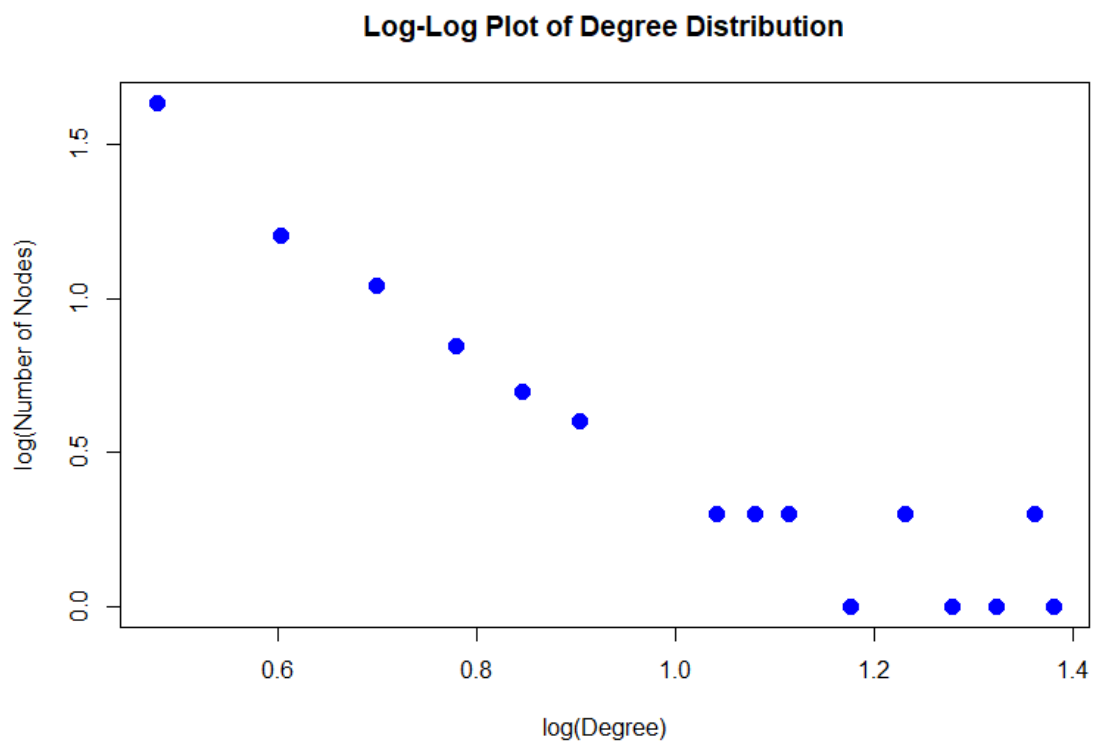


Slika 6.20: Histogram stupnja distribucije

Na histogramu je vidljivo da broj veza u odnosu na broj čvorova opada, no nije linearna distribucija. Naime većina čvorova ima broj veza manji od 10, no također možemo vidjeti da ipak određeni dio čvorova ima više od 10 veza. To se događa zbog scale-free svojstva samog modela u kojem su dominantni čvorovi čvorišta koja imaju više veza od uobičajenih čvorova.

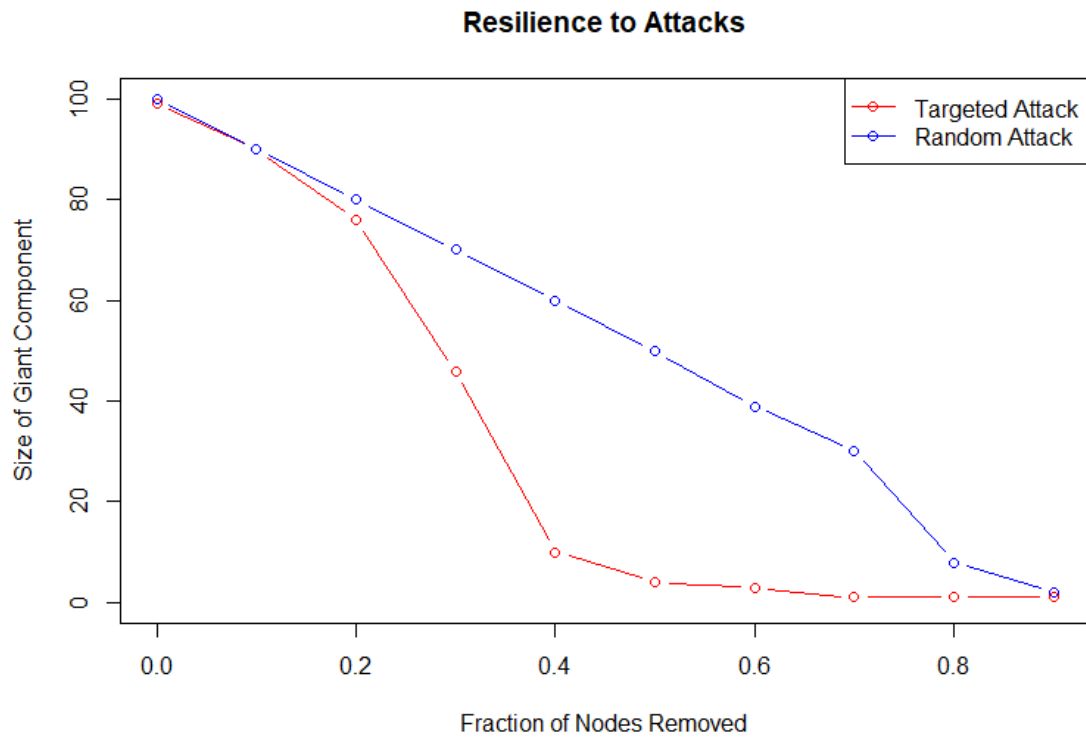
Kako bi se uvjerali da je to zaista jedno od svojstava modela, možemo proučiti i log-log diagram.

Budući da je i log-log dijagram skoro linearan, to potvrđuje svojstvo potencije.



Slika 6.21: Log-log dijagram stupnja distribucije

Za analizu svojstva robusnosti imamo sljedeći graf:

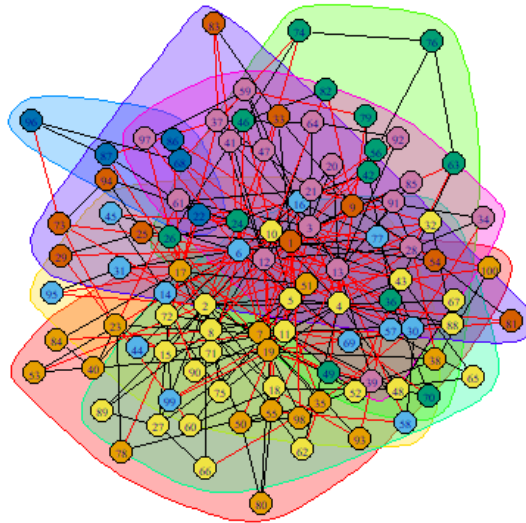


Slika 6.22: Dijagram robusnosti modela

Dijagram prikazuje veliku ranjivost na ciljane napade, dok mreža pokazuje visoku otpornost na nasumične ispade čvorova iz mreže.

Također možemo prikazati strukture zajednica unutar modela sljedećim grafom:

**Community Structure of BA Model**



Slika 6.23: Prikaz struktura zajednica unutar modela

## 6.5 Usporedba simulacija Watts-Strogatz i Barabási-Albertovog modela

### 6.5.1 Inicijalizacija i rast mreže

**Watts-Strogatz model:**

**Početna točka:** Simulacija započinje s redovitim prstenastom rešetkom gdje je svaki čvor povezan s najbližim susjedima. To osigurava strukturirani početak, gdje su čvorovi ravnomjerno povezani.

**Rast mreže:** Za razliku od Barabási-Albertovog modela, Watts-Strogatz model ne raste dodavanjem novih čvorova. Umjesto toga, mijenja postojeće veze na temelju vjerojatnosti prevezivanja 'p'.

### **Barabási-Albertov model:**

**Početna točka:** Simulacija obično počinje s malim brojem potpuno povezanih čvorova. Ova osnovna skupina služi kao sjeme za rast mreže.

**Rast mreže:** Novi čvorovi se kontinuirano dodaju u mrežu. Svaki novi čvor uspostavlja veze s postojećim čvorovima na temelju preferencijalnog povezivanja.

## **6.5.2 Mehanizmi povezivanja**

### **Watts-Strogatz model:**

**Preusmjeravanje:** Primarni mehanizam u Watts-Strogatz modelu je preusmjeravanje bridova. S vjerojatnošću 'p', bridovi se premještaju, povezujući čvorove koji su prethodno bili udaljeni. Ovo uvodi nasumičnost i smanjuje pravilnost mreže.

**Deterministički naspram stohastičkog:** Watts-Strogatz model nudi spektar od determinističkog ( $p=0$ , bez preusmjeravanja) do stohastičkog ( $p=1$ , potpuno preusmjeravanje).

### **Barabási-Albertov model:**

**Preferencijalno povezivanje:** Kako se novi čvorovi pridružuju mreži, preferencijalno se povezuju s čvorovima s većim stupnjevima. Ovaj mehanizam osigurava da dobro povezani čvorovi (čvorišta) s vremenom nastave stjecati više veza.

**Deterministički rast:** Rast mreže je deterministički u smislu da će svaki novi čvor uvijek formirati fiksni broj veza (obično označen kao 'm').

## **6.5.3 Rezultati simulacija i opažanja**

### **Watts-Strogatz model:**

**Fenomen malog svijeta:** Simulacije često otkrivaju svojstvo malog svijeta, koje se karakterizira kratkim prosječnim putanjama i visokim koeficijentima grupiranja. Ova ravnoteža posebno je vidljiva za srednje vrijednosti 'p'.

**Faza prijelaza:** Kako 'p' raste, primjetna je faza u kojoj mreža zadržava visoko grupiranje, ali drastično smanjuje svoju prosječnu putanju, utjelovljujući svojstvo malog svijeta.

## **Barabási-Albertov model:**

**Scale-free mreže:** Simulacije dosljedno proizvode mreže s distribucijom stupnja prema zakonu snage. To znači da većina čvorova ima malo veza, ali nekoliko čvorišta ima ogroman broj veza.

**Robusnost i ranjivost:** U simuliranim napadima, Barabási-Albert mreže pokazuju robusnost prema slučajnim kvarovima čvorova (budući da je vjerojatnost da se čvorište slučajno odabere niska). Međutim, ranjive su na ciljane napade na čvorišta.

# Poglavlje 7

## Zaključak

U području mrežne znanosti, mreže malog svijeta zauzimaju posebno mjesto zbog svoje prisutnosti u raznim sektorima, od kompleksnih neuralnih veza u mozgu do opsežnih društvenih veza na internetskim platformama. Modeli Watts-Strogatz i Barabási-Albert dali su dragocjene informacije o nastanku i svojstvima ovih mreža. Dok Watts-Strogatzov model istražuje ravnotežu između strukturalne redovitosti i slučajnosti, Barabási-Albertov model naglašava važnost preferencijalnog povezivanja u formiranju scale-free mreža.

Naša analiza simulacija ovih modela, posebice koristeći programski jezik R, osvijetlila je suptilnosti i kompleksnosti njihove konstrukcije i interpretacije. Kroz grafičke prikaze i specifične simulacije, dublje smo istražili kako mreže reagiraju na otpornost, naročito kada su podvrgnute slučajnim ili usmjerenim napadima.

Praktične upotrebe mreža malog svijeta prožimaju razna područja, od neurologije i urbanističkog dizajna do kvantne mehanike i ekoloških studija. Gledajući prema naprijed, mogućnosti koje mreže malog svijeta pružaju izgledaju beskrajno, nudeći inovacije u područjima tehnologije, medicine, humanističkih znanosti i mnogim drugima.

U osnovi, mreže malog svijeta ilustriraju duboku povezanost elemenata našeg svijeta. Istraživanje ovih mreža ne samo da produbljuje našu spoznaju o kompleksnim sustavima, već i pruža prilike za inovacije koje mogu iskoristiti snagu tih povezanosti u korist zajednice.

# Dodatak A

## Programski kod Watts-Strogatz modela

```
1 # Watts-Strogatzov model
2 library(igraph)
3
4 # Postavljanje parametara
5 broj_cvorova <- 30
6 broj_susjeda <- 4
7 vjeroj_stv_v <- 0.1
8
9 # Funkcija za generiranje mreza malog svijeta
10 generate_small_world <- function(broj_cvorova, broj_susjeda,
11   vjeroj_stv_v) {
12   g <- watts.strogatz.game(1, broj_cvorova, broj_susjeda, vjeroj_
13     stv_v, loops=FALSE)
14   V(g)$color <- "lightblue"
15   E(g)$color <- "gray"
16   V(g)$label <- 1:vcount(g)
17   return(g)
18 }
19
20 # Funkcija za iscrtavanje mreze
21 plot_network <- function(g, layout = layout_in_circle(g), vertex_
22   size = 10) {
23   plot(g, layout = layout, vertex.size = vertex_size, vertex.
24     frame.color = NA,
```



```
21     edge.arrow.size = 0.5, main = "Watts-Strogatz model mreze
      maloga svijeta")
22 }
23
24 # Generiranje i iscrtavanje mreze
25 g <- generate_small_world(broj_cvorova, broj_susjeda, vjeroj_stv_
      v)
26 plot_network(g)
```

# Dodatak B

## Programski kod

## Barabási-Albertovog modela

```
1 # Barabási-Albert model
2 library(igraph)
3
4 # Postavljanje parametara
5 n <- 100 # Ukupan broj čvorova
6 m <- 4   # Broj veza od novog čvora do čpostojeh čvorova
7
8 # Funkcija za generiranje Barabási-Albertovog grafa
9 generate_BA <- function(n, m) {
10   g <- graph.empty(n = m, directed = FALSE)
11   g <- graph.full(n = m, directed = FALSE)
12
13   for (new_node in seq(m + 1, n)) {
14     prob <- degree(g) / sum(degree(g))
15     selected_nodes <- sample(V(g), size = m, prob = prob, replace
16       = FALSE)
17     g <- add_vertices(g, 1)
18     g <- add_edges(g, c(rbind(rep(new_node, m), selected_nodes)))
19   }
20   return(g)
21 }
22
23 # Generiranje Barabási-Albertovog grafa
```

```
24 BA_graph <- generate_BA(n, m)
25
26 # Prikaz grafa s vizualnim čnaznaivanjem
27 plot(BA_graf,
28       vertex.size = 10,
29       vertex.label.cex = 0.5,
30       vertex.color = "skyblue",
31       edge.color = "gray50",
32       main = "-BarabásiAlbert Model",
33       layout = layout_fruchterman_reingold)
```

# Popis slika

2.1	Prikaz Eulerovog problema 7 mostova Konigsberga, izvor: <a href="https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem">https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem</a> . . . . .	5
2.2	Prikaz cikličkog grafa, izvor: <a href="https://www.researchgate.net/figure/A-drawing-of-a-cycle-graph-where-the-circles-correspond-to-nodes-and-the-lines-to-edges_fig1_337685909">https://www.researchgate.net/figure/A-drawing-of-a-cycle-graph-where-the-circles-correspond-to-nodes-and-the-lines-to-edges_fig1_337685909</a>	6
2.3	Prikaz kompletnog grafa sa 8 vrhova, izvor: <a href="https://www.researchgate.net/figure/Complete-graph-with-8-vertices-K-8_fig1_318560316">https://www.researchgate.net/figure/Complete-graph-with-8-vertices-K-8_fig1_318560316</a> . . . . .	7
2.4	Vizualizacija "PageRank" algoritma, izvor: <a href="https://neo4j.com/blog/graph-algorithms-neo4j-pagerank/">https://neo4j.com/blog/graph-algorithms-neo4j-pagerank/</a> . . . . .	8
3.1	Single-linkage na density-based klasteru, izvor: <a href="https://www.researchgate.net/figure/Connectivity-model-in-clustering_fig1_332053160">https://www.researchgate.net/figure/Connectivity-model-in-clustering_fig1_332053160</a> . . . . .	10
3.2	Single-linkage na Gausovim mješavinama, izvor: <a href="https://www.geeksforgeeks.org/different-types-clustering-algorithm/">https://www.geeksforgeeks.org/different-types-clustering-algorithm/</a> .	11
3.3	K-means kreiranje klastera sa međusobno najbližim centralnim točkama, izvor: <a href="https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning">https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning</a> . . . . .	12
3.4	Algoritam maksimizacije očekivanja koji koristi Gausove mješavine, izvor: <a href="https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning">https://www.javatpoint.com/clustering-in-machine-learning</a> . . . . .	13
3.5	Density-based kreiranje klastera prema gustoći čvorova, izvor: <a href="https://tutorialforbeginner.com/clustering-in-machine-learning">https://tutorialforbeginner.com/clustering-in-machine-learning</a> . . . . .	14
3.6	Nasumičnost u Watts-Strogatz modelu, izvor: <a href="https://www.researchgate.net/figure/Algorithm-of-Watts-Strogatz-model-which-can-be-tuned-by-parameter-p-0-1_fig1_258120851">https://www.researchgate.net/figure/Algorithm-of-Watts-Strogatz-model-which-can-be-tuned-by-parameter-p-0-1_fig1_258120851</a> . . . . .	16

4.1	Primjer scale-free mreže, izvor: <a href="https://www.researchgate.net/figure/Example-scale-free-network-representing-interacting-proteins-in-yeast-Baraba-si-and_fig1_228526623">https://www.researchgate.net/figure/Example-scale-free-network-representing-interacting-proteins-in-yeast-Baraba-si-and_fig1_228526623</a> . . . . .	20
5.1	Barabási–Albert model, izvor: <a href="https://www.geeksforgeeks.org/barabasi-albert-graph-scale-free-models/">https://www.geeksforgeeks.org/barabasi-albert-graph-scale-free-models/</a> 24	
6.1	Jednostavan graf čvorova sa jednom vezom . . . . .	26
6.2	Prikaz rešetkastog grafa čvorova . . . . .	27
6.3	Prikaz kružnog grafa čvorova . . . . .	28
6.4	Watts-strogatz model 1 . . . . .	29
6.5	Watts-strogatz model 2 . . . . .	30
6.6	Watts-strogatz finalni model . . . . .	32
6.7	Watts-strogatz model sa 10 i 30 čvorova. . . . .	33
6.8	Watts-strogatz model sa 2 i 4 susjedna čvora. . . . .	34
6.9	Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0. . . . .	35
6.10	Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0.05 do 0.2 . . . . .	36
6.11	Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 0.7 do 0.9 . . . . .	36
6.12	Watts-strogatz model s koeficijentom stvaranja novih veza vrijednosti 1 . . . . .	37
6.13	Dijagram robusnosti Watts-Strogatz modela . . . . .	38
6.14	Početni graf Barabási-Albertovog modela . . . . .	40
6.15	Graf Barabási-Albertovog modela nakon dodavanja prvog čvora . . . . .	41
6.16	Graf Barabási-Albertovog modela nakon dodavanja još 5 čvorova . . . . .	42
6.17	Konačni graf Barabási-Albertovog modela . . . . .	43
6.18	Uređeni graf Barabási-Albertovog modela . . . . .	44
6.19	Prikaz Barabási-Albertovog modela za analizu . . . . .	45
6.20	Histogram stupnja distribucije . . . . .	46
6.21	Log-log dijagram stupnja distribucije . . . . .	47
6.22	Dijagram robusnosti modela . . . . .	48
6.23	Prikaz struktura zajednica unutar modela . . . . .	49

# Bibliografija

- [Achard et al., 2006] Achard, S., Salvador, R., Whitcher, B., Suckling, J., and Bullmore, E. (2006). A resilient, low-frequency, small-world human brain functional network with highly connected association cortical hubs. *J Neurosci*, 3:e17.
- [Albert et al., 2000] Albert, R., Jeong, H., and Barabási, A.-L. (2000). Error and attack tolerance of complex networks. *nature*, 406(6794):378–382.
- [Andersen et al., 2007] Andersen, R., Chung, F., and Lang, K. (2007). Local partitioning for directed graphs using pagerank. In Bonato, A. and Chung, F. R. K., editors, *Algorithms and Models for the Web-Graph*, pages 166–178, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [Aprile et al., 2022] Aprile, F., Onesto, V., and Gentile, F. (2022). The small world coefficient  $4.8 \pm 1$  optimizes information processing in 2d neuronal networks. *NPJ Systems Biology and Applications*, 8(1):4.
- [Barabási, 2013] Barabási, A.-L. (2013). Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1987):20120375.
- [Barabasi and Albert, 1999] Barabasi, A.-L. and Albert, R. (1999). Albert, r.: Emergence of scaling in random networks. *science* 286, 509-512. *Science (New York, N. Y.)*, 286:509–12.
- [Boccaletti et al., 2006] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., and Hwang, D.-U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4):175–308.
- [Borgatti and Halgin, 2011] Borgatti, S. P. and Halgin, D. S. (2011). On network theory. *Organization science*, 22(5):1168–1181.

- [Du and Feldman, 2006] Du, H. and Feldman, M. W. (2006). Community structure in small-world and scale-free networks.
- [Euler, 1736] Euler, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140.
- [Foulds, 2012] Foulds, L. R. (2012). *Graph theory applications*. Springer Science & Business Media.
- [Gadjiev and Progulova, 2018] Gadjiev, B. and Progulova, T. (2018). Inhomogeneous coherent states in small-world networks: application to the functional brain networks. *arXiv preprint arXiv:1808.06214*.
- [Liu et al., 2015] Liu, H., Dolgushev, M., Qi, Y., and Zhang, Z. (2015). Laplacian spectra of a class of small-world networks and their applications. *Scientific Reports*, 5(1):9024.
- [Murtagh and Contreras, 2012] Murtagh, F. and Contreras, P. (2012). Algorithms for hierarchical clustering: an overview. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, 2(1):86–97.
- [Nerurkar et al., 2018] Nerurkar, P., Shirke, A., Chandane, M., and Bhirud, S. (2018). Empirical analysis of data clustering algorithms. *Procedia Computer Science*, 125:770–779. The 6th International Conference on Smart Computing and Communications.
- [Newman, 2003] Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2):167–256.
- [Sawai, 2014] Sawai, H. (2014). Hierarchical construction of multi-star small-world networks for real-world applications. *Artif. Intell. Res.*, 3(4):1–14.
- [Singh and Sharma, 2012] Singh, H. and Sharma, R. (2012). Role of adjacency matrix 'i&' adjacency list in graph theory. *International Journal of Computers 'I&' Technology*, 3:179–183.
- [Trudeau, 1993] Trudeau, R. (1993). *Introduction to Graph Theory*. Dover Books on Mathematics. Dover Pub.
- [Ugander et al., 2011] Ugander, J., Karrer, B., Backstrom, L., and Marlow, C. (2011). The anatomy of the facebook social graph. *CoRR*, abs/1111.4503.

- [Watts, 2004] Watts, D. J. (2004). *Six degrees: The science of a connected age*. WW Norton & Company.
- [Watts and Strogatz, 1998] Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442.
- [Xu et al., 1998] Xu, X., Ester, M., Kriegel, H.-P., and Sander, J. (1998). A distribution-based clustering algorithm for mining in large spatial databases. In *Proceedings 14th International Conference on Data Engineering*, pages 324–331.
- [Yann S. and Timothy J., 2012] Yann S., D. and Timothy J., D. (2012). Signal correlations in ecological niches can shape the organization and evolution of bacterial gene regulatory networks. *Advances in Microbial Physiology*, 61.
- [Zhang et al., 2021] Zhang, Y., Li, M., Wang, S., Dai, S., Luo, L., Zhu, E., Xu, H., Zhu, X., Yao, C., and Zhou, H. (2021). Gaussian mixture model clustering with incomplete data. *ACM Trans. Multimedia Comput. Commun. Appl.*, 17(1s).
- [Zheng-Zhen et al., 2014] Zheng-Zhen, Z., Wen-Jun, X., Shang-You, Z., and Jia-Ru, L. (2014). An effective method to improve the robustness of small-world networks under attack. *Chinese Physics B*, 23:088902.