Simetrije, algoritmi i matematika Rubikove kocke

Miličević, David

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Pula / Sveučilište Jurja Dobrile u Puli**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:137:577293

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-10**

Repository / Repozitorij:

Digital Repository Juraj Dobrila University of Pula

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Tehnički fakultet u Puli

DAVID MILIČEVIĆ

SIMETRIJE, ALGORITMI I MATEMATIKA RUBIKOVE KOCKE

Završni rad

Pula, svibanj, 2024. godine

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Tehnički fakultet u Puli

DAVID MILIČEVIĆ

SIMETRIJE, ALGORITMI I MATEMATIKA RUBIKOVE KOCKE

Završni rad

JMB: 0242014194, izvanredni student

Studijski smjer: računarstvo

Predmet: Matematika 1, Matematika 2; Strukture podataka i algoritmi

Znanstveno područje: 1. Područje prirodnih znanosti
Znanstveno polje: 1.01. Matematika
Znanstvena grana: 1.01.01 algebra i teorija brojeva, 1.01.03 diskretna i kombinatorna matematika, 1.01.05 matematička logika i računarstvo
Mentor: Neven Grbac, Tihana Galinac Grbac

Pula, svibanj, 2024. godine

Tehnički fakultet u Puli

Ime i prezime studenta/ice David Miličević

JMBAG 0242014194

Status: ☐ redoviti ☒ izvanredni

PRIJAVA TEME ZAVRŠNOG RADA

Neven Grbac, Tihana Galinac Grbac

Ime i prezime mentora

Računarstvo

Studij

Matematika 1, Matematika 2, Strukture podataka i algoritmi

Kolegij

Potvrđujem da sam prihvatio/la temu završnog/diplomskog rada pod naslovom:

Simetrije, algoritmi i matematika Rubikove kocke

(na hrvatskom jeziku)

Symmetries, Algorithms and Mathematics of Rubik's Cube

(na engleskom jeziku)

Datum: 21.3.2023.

IZJAVA O KORIŠTENJU AUTORSKOGA DJELA

Ja, David Miličević, dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, nositelju prava korištenja, da moj završni rad pod nazivom „Simetrije, algoritmi i matematika Rubikove kocke" upotrijebi da tako navedeno autorsko djelo objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te preslika u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu sa Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radipromicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

Potpis

U Puli, 19.05.2024.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani David Miličević, kandidat za prvostupnika računarstva ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljeni način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

Miličević D.

U Puli, 19.05.2024. godine

Sadržaj

1. Uvod

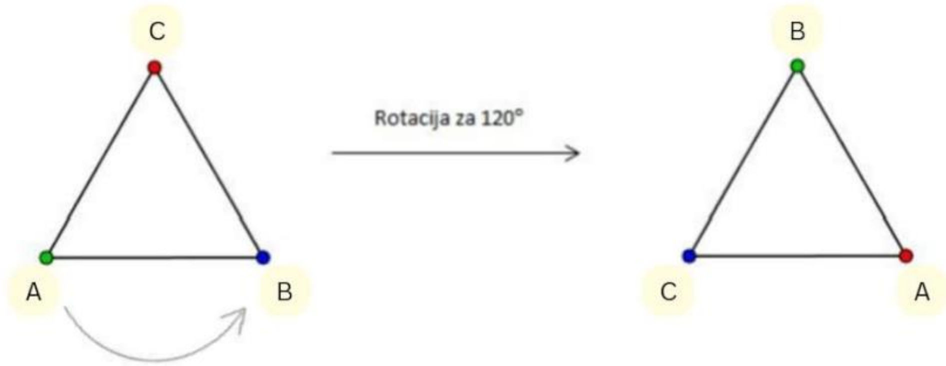
Rubikova kocka, slagalica koja je osvojila svijet svojom jednostavnom, ali izazovnom strukturom, predstavlja izazov ne samo za entuzijaste zagonetki, već za matematičare i informatičare. Njezini raznobojni kvadratići, miješajući se u kaotičnom nizu, pružaju ogromnu paletu kombinacija koje zahtijevaju duboko razumijevanje matematičkih principa i sofisticirane algoritme kako bi se riješila.

Ovaj rad istražuje složenost Rubikove kocke kroz prizmu matematike, fokusirajući se na koncepte simetrije, grupa i algoritama. Analizirajući strukturu kocke i njene simetrične karakteristike, istražujemo kako matematički modeli mogu pomoći u razumijevanju i optimizaciji procesa rješavanja. Osim toga, istražujemo povijest Rubikove kocke i njezin utjecaj na područja kao što su matematika, računarstvo i obrazovanje.

Kroz ovaj rad, cilj nam je produbiti razumijevanje Rubikove kocke kao matematičkog fenomena, istražujući njene simetrije i algoritme koji stoje iza nje, te istaknuti ulogu matematike u razumijevanju i rješavanju ovog zagonetnog izazova.

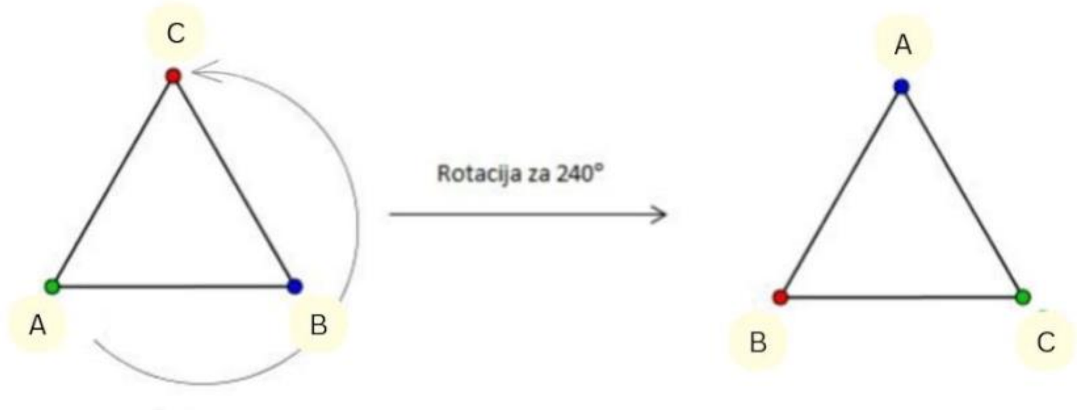
2. Simetrije

Razmotrimo transformacije ravnine koje preslikavaju jednakostranični trokut u samoga sebe kao ilustrativni primjer simetrija u ravnini. Jedna od takvih transformacija je rotacija trokuta za $120°$ oko središta. Kroz tu rotaciju, vrh A se preslikava u vrh B, vrh B u vrh C, a vrh C u vrh A. Ovaj proces demonstrira svojstvo simetrije i može se analizirati kroz koncept grupe [1].



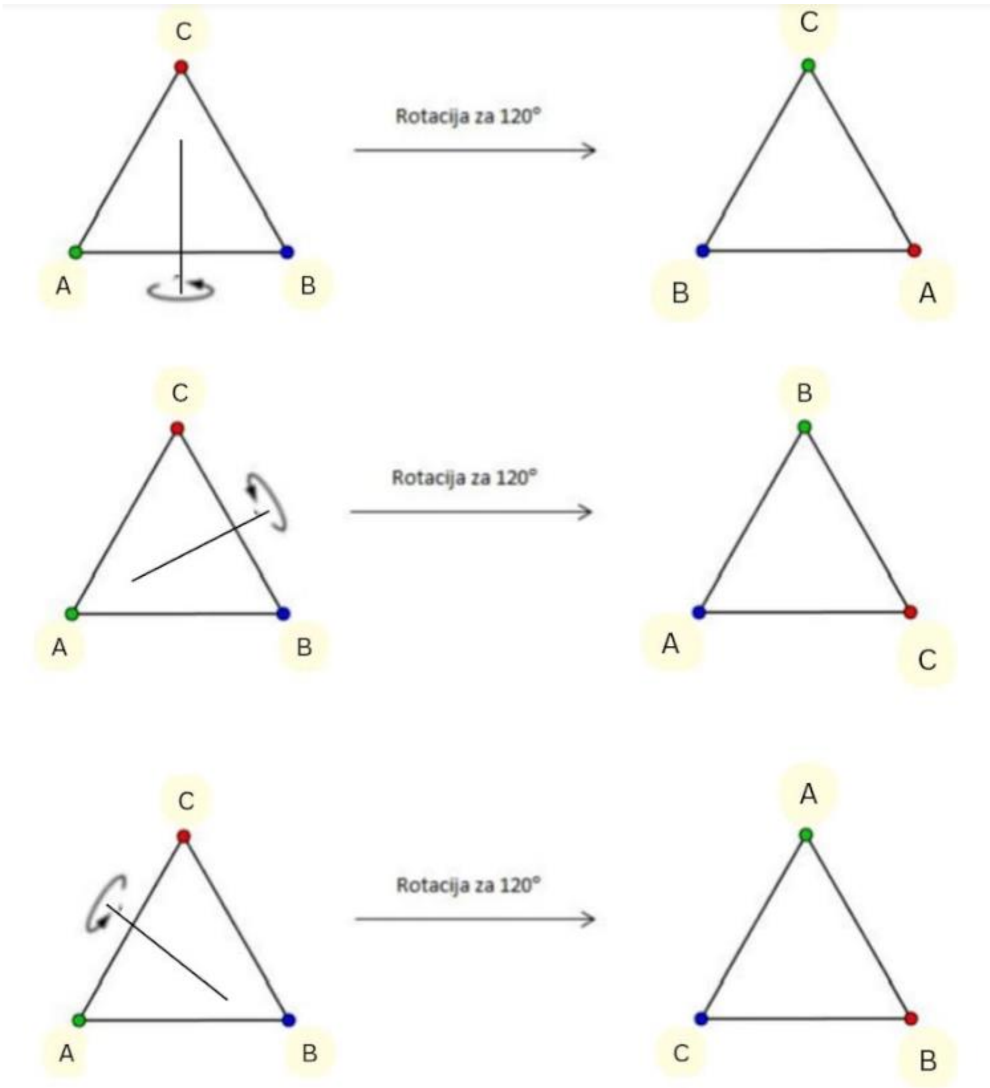
Slika 1. Rotacija jednakostraničnog trokuta za $120°$. Modificirano prema izvoru [1].

Kada izvršimo rotaciju jednakostraničnog trokuta za $240°$ oko njegovog središta, opažamo da se vrh A premješta na poziciju vrha C, vrh B na poziciju vrha A, dok se vrh C premješta na poziciju vrha B. Ovaj proces možemo interpretirati kao rotaciju za $240°$, što zapravo predstavlja istu transformaciju kao rotacija za $-120°$ u smjeru kazaljke na satu [1].



Slika 2. Rotacija jednakostraničnog trokuta za $240°$. Modificirano prema izvoru [1].

Rotiranjem jednakostraničnog trokuta za $360°$ oko njegova središta, sve točke trokuta se vraćaju na svoje početne položaje. Vrh A ostaje na mjestu vrha A, vrh B na mjestu vrha B, a vrh C na mjestu vrha C. Ovaj proces nazivamo identitetom, jer ne mijenja raspored točaka trokuta. Rotacijom više ne možemo dobiti niti jedan novi poredak vrhova. Dobivene trokute također možemo zrcaliti s obzirom na pravac koji prolazi gornjim vrhom trokuta i polovištem njemu nasuprotnih stranica. Točke na tom pravcu ostaju na istom mjestu, što znači da će gornji vrh ostati nepromijenjen, dok će preostala dva vrha zamijeniti mjesta [1].



Slika 3. Zrcaljenje jednakostraničnog trokuta u ravnini. Modificirano prema izvoru [1].

Razmotrimo raspored vrhova u jednakostraničnim trokutima koji su rezultat rotacija i zrcaljenje: ABC, ACB, BCA, BAC, CAB i CBA. Kada analiziramo transformacije ravnine koje čuvaju trokut nepromijenjenim, primjećujemo da se vrhovi moraju preslikati u sebe kako bi se očuvala struktura trokuta [1]. Budući da mogućih rasporeda tri vrha ima točno $3! = 6$, na gornjim slikama dobivene su sve moguće različite transformacije koje čuvaju jednakostranični trokut.

Prema definiciji, simetrija skupa X u ravnini E je preslikavanje (funkcija) $f: E \to E$ koje čuva udaljenost i koje preslikava skup X u samoga sebe, tj. $f(X) = X$ [3]. Preslikavanje ravnine koje čuva udaljenost zove se izometrija ravnine i uvijek je bijektivno.

Kada proučavamo rotaciju i zrcaljenje u jednakostraničnom trokutu, zapravo promatramo kompoziciju simetrija, koja je opet simetrija. S obzirom na to da su simetrije bijekcije i svaka od njih ima inverz, koji je također simetrija. Kompozicija simetrija je asocijativna, jer je dobro poznato da je kompozicija bilo kakvih preslikavanja asocijativna. Također, identitet je simetrija koja svaki vrh trokuta preslikava u njega samog [1].

Permutacija konačnog skupa X definira se kao bilo koja bijektivna funkcija $f: X \to X$ koja preslikava skup X u sebe. Interesantno je da skup svih takvih permutacija, kada se gleda kroz prizmu operacije kompozicije, čini algebarsku strukturu grupe. U slučaju kada je X skup s n elemenata, na primjer $X = \{1, 2, \dots, n\}$, ovu grupu označavamo sa S_n i nazivamo je simetričnom grupom na n elemenata. Važno je napomenuti da grupe permutacija, označene s $(S_n, \circ)$, generalno ne zadovoljavaju svojstvo komutativnosti. Fascinantno je da se broj mogućih permutacija za skup s n elemenata izračunava kao $n!$, pokazujući eksponencijalni rast broja permutacija s povećanjem n $[3]$.

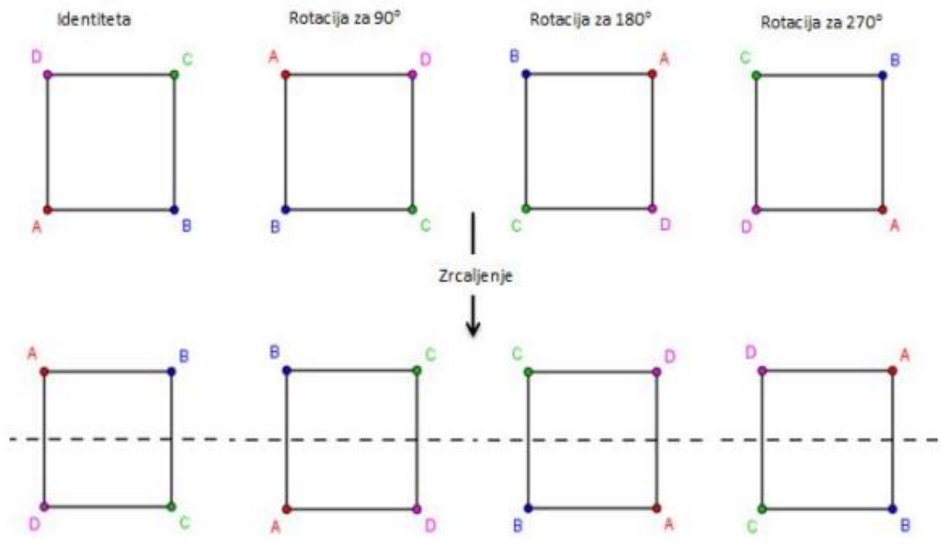
Za dublje razumijevanje permutacija koristi se i koncept cikličkog zapisa. U ovom kontekstu, ciklus predstavlja specifičnu permutaciju elemenata iz skupa $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ na način da se svaki element preslikava u sljedeći u nizu, dok se posljednji preslikava natrag na prvi, formirajući zatvoreni krug. Ovaj način prikaza omogućava da se svaka permutacija izrazi kao kombinacija disjunktnih ciklusa, gdje se ciklus duljine k, označen kao $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, odnosi na permutaciju koja uključuje navedenih k elemenata, pri čemu se x_1 preslikava u x_2, zatim x_2 u x_3, i tako dalje sve do x_k koje se preslikava natrag u x_1 [2]. Posebno, permutacije koje se mogu izraziti kao jedan ciklus nazivamo k-permutacijama, dok se ciklus duljine 2 ističe pod imenom transpozicija.

Primjerice, permutacija elemenata skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u novi poredak $\{3, 6, 4, 1, 5, 2\}$ u cikličkoj notaciji izražava se kao $(1\ 3\ 4)(2\ 6)(5)$, što ilustrira strukturu koja se sastoji od jednog ciklusa s tri elementa, jednog ciklusa s dva elementa, i jednog jednočlanog ciklusa.

Nadalje, razmatrajući $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1)$ kao skup svih cijelih brojeva modulo n, formira se grupa $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ koja predstavlja primjer cikličke grupe s operacijom zbrajanja modulo n i one su komutativne, za razliku od simetrične grupe, što znači da redoslijed operacija ne utječe na rezultat, čineći ih temeljnim primjerom u teoriji grupa [2].

Razmatrajući skup simetrija kvadrata označenog s $ABCD$, uočavamo da postoji više načina da se kvadrat transformira unutar svoje ravnine zadržavajući svoju osnovnu strukturu. Identitetska transformacija je najosnovnija, gdje svaka točka kvadrata ostaje nepromijenjena. Dodatno, kvadrat čuvaju rotacije oko njegovog centra za kutove od $90°, 180°\ i\ 270°$, svaka preslikavajući kvadrat u različite orijentacije, odnosno poretke vrhova [1].

Zanimljivo, proces zrcaljenja duž dijagonala ili središnjih osi također rezultira simetrijama. Konkretno, zrcaljenje koje uzrokuje zamjenu vrhova A s D i B s C, u kombinaciji s prethodno spomenutim rotacijama, proširuje skup dostupnih simetričnih transformacija. Komponiranjem ovih rotacija sa zrcaljenjima duž istih osi, moguće je konstruirati sveukupno osam jedinstvenih simetričnih stanja kvadrata. To je puno manje od ukupnog broja mogućih rasporeda četiri vrha u nizu koji je jednak $4! = 24$. Stvar je u tome da neki rasporedi vrhova kvadrata se ne mogu dobiti simetrijama jer ne čuvaju udaljenosti. Ovaj skup simetrija proizlazi iz fundamentalnog svojstva izometrije, koja čuva udaljenosti među točkama te stoga osigurava da se dijagonale kvadrata preslikavaju samo u sebe. U kontekstu kvadrata, sa samo dvije dijagonale, ova ograničenja impliciraju da se vrhovi A i C, te B i D, mogu preslikavati isključivo međusobno. Takva analiza potvrđuje da kvadrat $ABCD$ posjeduje točno osam simetrija koje iscrpljuju sve mogućnosti simetričnih transformacija bez iznimke, budući da bilo koja druga permutacija vrhova ne bi zadržala esencijalna geometrijska svojstva kvadrata [1]. Naime, dogodilo bi se preslikavanje dijagonale u stranicu, što ne bi bila izometrija.



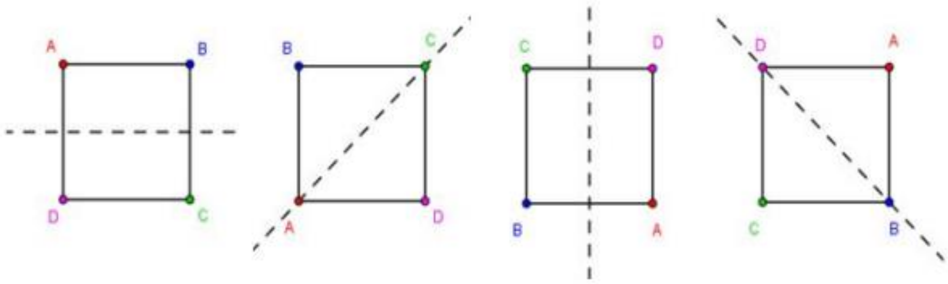
Slika 4. Prikaz simetrije kvadrata [1].

Istražujući različite metode simetrije koje se mogu primijeniti na kvadrat, otkrivamo da postoji više načina zrcaljenja koji rezultiraju istim permutacijama vrhova. Jedna takva metoda uključuje zrcaljenje koje fiksira vrhove B i D, ostavljajući ih na njihovim originalnim pozicijama, dok istovremeno mijenja mjesta vrhovima A i C. Ovo zrcaljenje iskorištava os simetrije koja prolazi kroz vrhove B i D.

Dodatno, razmatrajući drugu vrstu zrcaljenja, možemo zamijeniti pozicije vrhova C i D, kao i A i B. Ova transformacija koristi drugačiju os simetrije, pokazujući fleksibilnost u načinu na koji se kvadrat može manipulirati zadržavajući svoju osnovnu strukturu [1].

Još jedna metoda zrcaljenja drži vrhove B i D nepomičnima, budući da se nalaze duž osi zrcaljenja, dok vrhovi A i C zamjenjuju svoje pozicije. Ova specifična transformacija stvara poredak vrhova koji je jednak onome dobivenom primjenom zrcaljenja nakon serije rotacija, demonstrirajući ponovljivost određenih permutacija unutar skupa simetrija kvadrata [1].

Ove metode zrcaljenja naglašavaju sposobnost kvadrata da podržava različite simetrične transformacije, čime se obogaćuje razumijevanje geometrijskih simetrija i permutacija. Svaka od ovih transformacija služi kao primjer kako geometrijski oblici mogu biti manipulirani na načine koji čuvaju njihove ključne karakteristike, poput udaljenosti i kutova, dok istovremeno nude raznolik spektar vizualnih rezultata. Kroz ovu analizu, postaje očito da je kombinacija rotacija i zrcaljenja ključna za identifikaciju svih mogućih simetričnih stanja kvadrata, pružajući dublji uvid u strukturalnu i vizualnu kompleksnost geometrijskih oblika [1].



Slika 5. Prikaz različitih osi simetrije [1].

Ako razmatramo sve moguće permutacije vrhova kvadrata koje zadržavaju njegove dijagonale, možemo identificirati svih osam simetrija kvadrata koje su prethodno spomenute. Međutim, ovaj pristup može biti nepraktičan za veće skupove, stoga je preporučljivo koristiti učinkovitije metode za pronalaženje svih simetrija kvadrata. U tu svrhu, uvodimo nekoliko ključnih termina i analiziramo strukturu simetrične grupe kvadrata.

Definirajmo podgrupu H unutar grupe G kao neprazan podskup koji također predstavlja grupu pod operacijom definiranom u G. Drugim riječima, H je podgrupa od G ako ispunjava sljedeće uvjete:

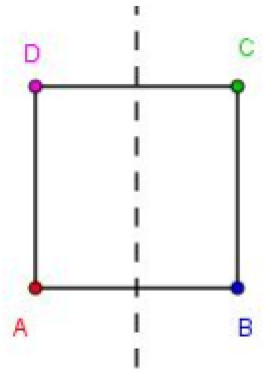
Za svaki par elemenata x, y koji pripadaju H, njihov produkt xy također pripada H;

Za svaki element x u H, njegov inverz x^{-1} također je element H.

Ovo označavamo kao $H \leq G$.

Analizirajući element grupe označen s a, primjećujemo da njegova dvostruka primjena, označena kao $a \circ a$ ili a^2, ukazuje na njegovu ponovnu upotrebu. Općenito, možemo reći da $a^{n+1} = a^n \circ a$, gdje je $n \geq 1$.

Fokusirajući se na simetrije kvadrata, istražujemo rotacije i zrcaljenja. Rotaciju za $90°$ označavamo s a. Njezina kompozicija s još jednom takvom rotacijom, a^2, rezultira rotacijom od $180°$. Slično, a^3 predstavlja rotaciju od $270°$, dok a^4, koja odgovara rotaciji od $360°$, predstavlja neutralni element, koji označavamo s e ili id. Zrcaljenje preko osi koja dijeli kvadrat na pola, odnosno preko linija koje spajaju sredine suprotnih stranica, označavamo s b [1].



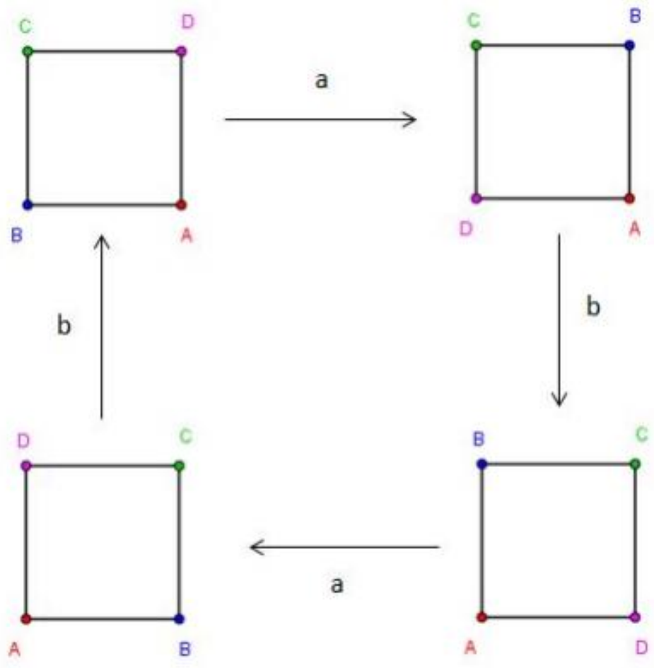
Slika 6. Prikaz zrcaljenja [1].

Zrcaljenje uzrokuje razmjenu vrhova A s B i C s D, pokazujući da je njezin inverz zapravo ona sama: $b^{-1} = b$. Osim toga, dvostruka primjena zrcaljenja na kvadrat vraća nas na originalnu poziciju, što znači:

$$b^2 = b \circ b = b \circ b^{-1} = e.$$

Ovaj proces ilustrira da kada se zrcaljenje primjenjuje dva puta, rezultat je neutralni element, što ukazuje na povratak u početni položaj kvadrata [1].

Sve simetrije kvadrata koje su prikazane mogu se izraziti kroz kombinacije simetrija a i b na ovaj način: $\{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ kao što smo vidjeli na početku kad smo konstruirali simetrije kvadrata. Stoga one čine skup simetrija kvadrata. Skup dobivenih elemenata također se može opisati koristeći različite veze između njih. Počevši od kvadrata $ABCD$, primjena rotacije a rezultira u kvadratu $DABC$. Daljnja primjena zrcaljenja b pretvara kvadrat u $ADCB$. Dodatna rotacija transformira kvadrat u $BADC$, a završna primjena zrcaljenja b vraća nas na izvorni kvadrat $ABCD$. Ova metoda ilustrira kako kombinacije određenih simetrija mogu dovesti do različitih, ali na kraju povezanih konfiguracija kvadrata [1].



Slika 7. Primjer dodatne relacije simetrija kvadrata [1].

Utvrđujemo da $baba = e$, odnosno $(ba)^2 = e$, predstavlja dodatnu važnu relaciju unutar ove grupe. Grupa simetrija kvadrata može se formalno definirati kao grupa generirana elementima a i b, podložna određenim relacijama: $a^4 = b^2 = (ba)^2 = e$ su relacije koje definiraju odnose među generatorima [1]. Ovakav način zapisa grupe simetrija omogućuje jednostavnije određivanje svih simetrija složenijih geometrijskih likova i tijela.

3. Kocka, grupe i simetrije kocke

Simetrija kocke se može opisati kao permutacija njenih osam vrhova tako da se bridovi preslikaju na bridove. Naime, svojstvo čuvanja udaljenosti ne bi bilo ispunjeno kada bi se neki brid preslikao u neku od dijagonala kocke ili njenih strana. Drugim riječima, svaka simetrija kocke mora također preslikati parove vrhova koji su povezani bridom na druge parove koji su također povezani bridom. Kocka ima ukupno 48 simetrija, od kojih se 24 mogu fizički ostvariti na čvrstoj kocki, dok ostale 24 simetrije "okreću" kocku iznutra za van. Zašto postoji točno 24 fizičke simetrije? Kocka ima šest strana, svaka strana može biti premještena na dno, te se ta strana može rotirati u četiri različite pozicije: $6 * 4 = 24$. Zašto preostale 24 simetrije kocke ne možemo fizički realizirati? Ograničeni smo trodimenzionalnošću našeg prostora. Naime, već u ravnini zrcaljenja jednakostraničnog trokuta ne možemo realizirati bez izlaženja iz ravnine. Zaista, da bi fizički napravili zrcaljenje trokuta, moramo ga izrezati iz ravnine i preokrenuti, a za to nam treba treća dimenzija. Pritom smo njegovu gornju i donju stranu zamijenili. Slično je sa zrcaljenjima kocke. Da bi ih fizički realizirali, morali bi izaći u četvrtu dimenziju i preokrenuti unutarnju i vanjsku stranu plašta kocke. U svakom slučaju, broj simetrija kocke, fizičkih ili ne, je puno manji nego ukupan broj permutacija vrhova koji iznosi $8! = 40320$.

Prije nego što razmotrimo rotacije, važno je shvatiti da svaka rotacija mora zadržati kocku u istom položaju prije i poslije rotacije. To znači da ne možemo razlikovati strane kocke ako ju ne označimo bojama, brojevima ili nekim drugim oznakama kako bismo vidjeli je li rotacija izvršena. Svaka rotacija ima svoju "os" koja prolazi kroz središte kocke. Postoje tri moguće osi rotacije:

- Os može prolaziti kroz središta dvije nasuprotne strane.
- Kroz polovišta dvaju nasuprotnih bridova.
- Kroz dva nasuprotna vrha.

Kocka ima šest strana, što znači da postoje tri para nasuprotnih strana. Ako je os rotacije kroz središta dvije nasuprotne strane, postoje dvije moguće rotacije od $90°$, jedna u jednom smjeru, a druga u suprotnom. To daje šest rotacija od $90°$. Također, kada os prolazi kroz središta dvije nasuprotne strane, dobivamo još tri rotacije od $180°$.

Kocka također ima dvanaest bridova pa postoji 6 parova nasuprotnih bridova. Za os rotacije kroz polovišta dva nasuprotna brida, jedina moguća rotacija je rotacija od $180°$. To nam daje 6 rotacija, po jednu za svaki par nasuprotnih bridova.

Naposljetku, kocka ima osam vrhova, što znači da postoji četiri para nasuprotnih vrhova. Ako os rotacije prolazi kroz dva nasuprotna vrha, imamo dvije moguće rotacije od $120°$, jednu u jednom smjeru, a drugu u suprotnom. To znači da imamo 8 rotacija od $120°$, po dvije za svaki par nasuprotnih kutova.

Kada zbrojimo sve rotacije, dobijemo ukupno $6 + 3 + 6 + 8$ različitih rotacija. Dodamo li i "rotaciju" od $0°$, koja ništa ne mijenja, dobivamo grupu od 24 rotacije. Ovo se naziva rotacijska grupa kocke [5]. Ona je analogna simetričnoj grupi S_4, poznatoj kao grupa permutacija četiri objekta. Ako toj grupi dodamo još i zrcaljenja kocke, dobije se grupa simetrija kocke koja ukupno ima 48 različitih izometrija koje mogu transformirati kocku na različite načine. Ovo svojstvo kocke čini je zanimljivim objektom u geometriji i matematici.

Sve 24 permutacije dijagonala, odnosno sve 24 rotacije kocke, mogu se generirati s pomoću samo 2 rotacije. Ovo svojstvo pokazuje duboku povezanost između rotacijskih simetrija kocke i permutacija njenih dijagonala. Osim što pruža uvid u strukturu rotacijskih simetrija kocke, ova činjenica ističe fleksibilnost rotacijskih operacija u manipulaciji dijagonalama.

Zamislimo proces u kojem dvije vrste rotacija mijenjaju položaj osam elemenata. Prva vrsta rotacije, koju nazivamo rotacija A, izvodi se okretanjem u smjeru kazaljke na satu oko vertikalne osi za $90°$. Na slici 1.8 to je rotacija oko osi označene sa z. Kao rezultat, elementi promijene svoje pozicije u skladu s pravilom da element na poziciji 1 prelazi na poziciju 2, element na poziciji 2 prelazi na poziciju 3, i tako dalje, sve do elementa 4 koji prelazi na poziciju 1. Slično element na poziciji 5 prelazi na poziciju 6, element na poziciji 6 prelazi na 7, i tako dalje sve do elementa na poziciji 8 koji prelazi u poziciju 5 [5].

- Rotacija A (R_A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Ova rotacija odgovara permutaciji koja se u cikličkom obliku može zapisati kao: $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$.

Druga vrsta rotacije, rotacija B, odnosi se na okretanje oko horizontalne osi, koja je označena s y na slici 8. Pri toj rotaciji kvadrat 1265 se zarotira posebno, a kvadrat 3784 posebno. Na primjer, element na poziciji 3 zauzima mjesto elementa na poziciji 7.

- Rotacija B (R_B)

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,6\,7\,3\,1\,5\,8\,4 \end{pmatrix}$$

Ova rotacija odgovara permutaciji koja se u cikličkom obliku može zapisati kao: $(1\ 2\ 6\ 5)(3\ 7\ 8\ 4)$.

Primjenjujući ove rotacije više puta, možemo stvoriti nove permutacije. Na primjer, dvostruka primjena rotacije $(R_A)^2$ vodi do situacije gdje element na početnoj poziciji 1 nakon dvije rotacije završava na poziciji 3.

- Dvostruka rotacija $(R_A)^2$

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,1\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,1\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix}.$$

Rezultat te kompozicije je:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,4\,1\,2\,7\,8\,5\,6 \end{pmatrix}$$

što možemo zapisati u cikličkom obliku kao:

$$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8).$$

Slično tome, trostruka primjena rotacije $(R_A)^3$ rezultira permutacijom gdje element koji je počeo na poziciji 3 završava na poziciji 2 [4].

- Trostruka rotacija $(R_A)^3$

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,1\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,1\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,1\,6\,7\,8\,5 \end{pmatrix}$$

Rezultat te kompozicije je:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 4\,1\,2\,3\,8\,5\,6\,7 \end{pmatrix}$$

što možemo zapisati u cikličkom obliku kao:

$$(1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 6).$$

Zanimljivo je da, kada primijenimo bilo koju od ovih rotacija četiri puta, svaki element se vraća na svoju originalnu poziciju, što se smatra identičnom rotacijom (I) [4]. To je zato što se radi o rotaciji za 4 puta $90°$ što daje $360°$. Slično, za rotaciju R_B vrijedi da je $(R_B)^2$.

- Dvostruka rotacija $(R_B)^2$

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 2\ 6\ 7\ 3\ 1\ 5\ 8\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 2\ 6\ 7\ 3\ 1\ 5\ 8\ 4 \end{pmatrix}$$

Rezultat te kompozicije je:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 6\ 5\ 8\ 7\ 2\ 1\ 4\ 3 \end{pmatrix}$$

što možemo zapisati u cikličkom obliku kao:

$$(1\ 6)(2\ 5)(3\ 8)(4\ 7).$$

Na temelju ovih rotacija možemo definirati podgrupu koja se sastoji od osam elemenata:

$$\{I, R_A, (R_A)^2, (R_A)^3, (R_B)^2, (R_B)^2 R_A, (R_B)^2 (R_A)^2, (R_B)^2 (R_A)^3\}.$$

Isto tako, komponiranjem rotacija R_A i R_B dobije se $R_A R_B$, te $(R_A R_B)^2$, a $(R_A R_B)^3 = I$.

- Rotacija $R_A R_B$

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 2\ 3\ 4\ 1\ 6\ 7\ 8\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 2\ 6\ 7\ 3\ 1\ 5\ 8\ 4 \end{pmatrix}$$

Rezultat te kompozicije je:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 3\ 7\ 8\ 4\ 2\ 6\ 5\ 1 \end{pmatrix}$$

što možemo zapisati u cikličkom obliku kao:

$$(1\ 3\ 8)(2\ 7\ 5).$$

- Rotacija $(R_A R_B)^2$

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 3\ 7\ 8\ 4\ 2\ 6\ 5\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 3\ 7\ 8\ 4\ 2\ 6\ 5\ 1 \end{pmatrix}$$

Rezultat te kompozicije je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

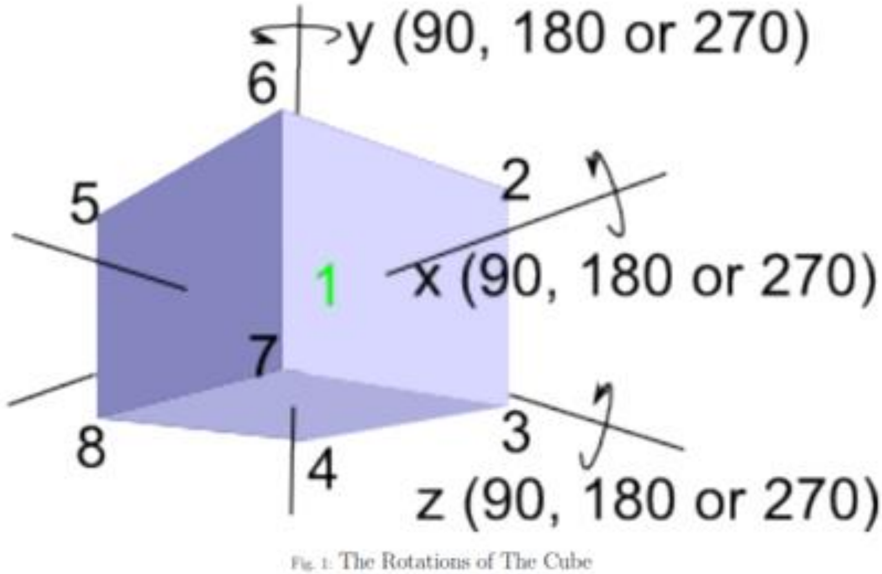
što možemo zapisati u cikličkom obliku kao:

$$(1\ 8\ 3)(2\ 5\ 7).$$

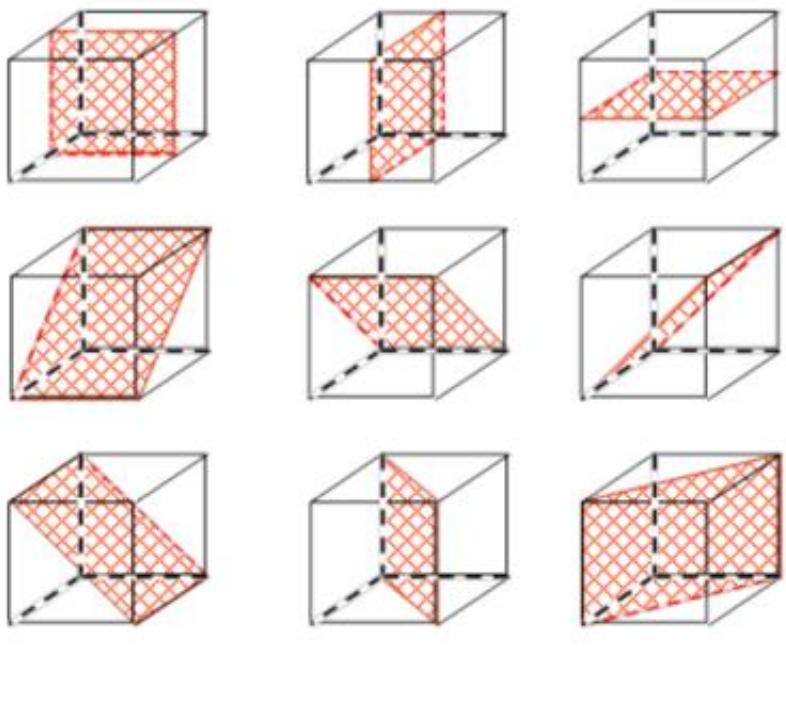
Stoga postoji i manja podgrupa od tri elementa:

$$\{I, R_A R_B, (R_A R_B)^2\}.$$

Zajednički višekratnik redova ovih podgrupa iznosi 24, što pokazuje da je ukupan broj jedinstvenih permutacija koje se mogu ostvariti kombiniranjem ove dvije rotacije točno jednak redu rotacijske grupe kocke [4]. Dakle, sve rotacije kocke se mogu dobiti komponiranjem u različitom poretku ovih dviju osnovnih rotacija R_A i R_B. Stoga su R_A i R_B generatori grupe rotacija kocke.



Slika 8. Grafički prikaz rotacija kocke [4].



Slika 9. Grafički prikaz zrcaljenja ravnina kocke [4].

Simetrije kocke možemo prikazati i matrično. Pritom koristimo takozvane permutacijske matrice. To su kvadratne matrice koje u svakom retku i stupcu sadrže točno jednu jedinicu, a svi ostali elementi matrice su nula.

U skupu svih $3X3$ permutacijskih matrica svakom matričnom elementu koji je jedan na bilo koji način dodijelimo znak plus ili minus. Budući da postoji 6 takvih permutacijskih matrica i svakoj od njih možemo predznake dodijeliti na $2^3 = 8$ različitih načina, ukupno se dobije 48 matrica. Te matrice predstavljaju cjelokupnu grupu simetrija kocke koju nazivamo oktaedarska grupa. Ovaj naziv je posljedica toga da se grupa simetrija kocke podudara s grupom simetrija oktaedra. Točno 24 matrice s determinantom jednakom $+1$ su rotacijske matrice oktaedarske grupe i čine podgrupu koja predstavlja rotacijsku grupu kocke [4].

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ovo je primjer matrica koje predstavljaju rotaciju u okviru oktaedarske grupe.

Ostale 24 matrice s determinantom -1 odgovaraju zrcaljenju. Na primjer, neke od matrica koje predstavljaju zrcaljenje su [4]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sveukupno, te matrice omogućuju opisivanje svih mogućih simetričnih transformacija kocke, uključujući rotacije i zrcaljenja, koje su ključne za razumijevanje simetričnih svojstava oktaedarske grupe.

Važno je naglasiti da skup od 48 matrica obuhvaća sve simetrije kocke, gdje se rotacije koje čuvaju orijentaciju (s determinantom $+1$) odvajaju od transformacija koje uključuju zrcaljenje (s determinantom -1), pružajući uvid u fundamentalnu strukturu oktaedarske grupe i njezinu ulogu u geometrijskim transformacijama [5].

4. Pregled osnovnih pojmova teorije grupa

U prethodnim poglavljima uveli smo pojam grupe kroz primjere izučavanja simetrija geometrijskih objekata. Ipak, prije nego što možemo formirati grupu Rubikove kocke, potrebno je razumjeti nekoliko ključnih pojmova iz teorije grupa. U nastavku je sažetak bitnih definicija iz teorije grupa koji donosim prateći knjigu Joseph A. Galliana [6].

Definicija 1.

- Neka je G neprazan skup sa binarnom operacijom $*$, gdje $*$: $G \ x \ G \rightarrow G$, koju pišemo kao $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2$. Skup G naziva se grupa s obzirom na ovu operaciju, ako zadovoljava sljedeće uvjete:
    1. Asocijativnost: Za svaki a, b i c u G, vrijedi $(a * b) * c = a * (b * c)$.
    2. Postojanje identiteta: Postoji element e iz G takav da je $a * e = e * a = a$ za sve a iz G.
    3. Postojanje inverza: Za svaki element a iz G, postoji a^{-1} iz G takav da $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Primjer 2.

- Neka je G skup cijelih brojeva, $G = \mathbb{Z}$, s obzirom na operaciju zbrajanja.
    1. Asocijativnost: Zbrajanje je asocijativno, tj.$(x + y) + z = x + (y + z)$ za sve cijele brojeve x, y, z.
    2. Neutralni element: Neutralni element od G je 0 jer je $x + 0 = 0 + x = x$ za sve cijele brojeve x.
    3. Postojanje inverza: Za svaki x iz G, postoji njemu suprotni cijeli broj $-x$ iz G takav da je $x + (-x) = 0$.

Slično se dobije da su skupovi racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva grupe s obzirom na operaciju zbrajanja. Primijetimo da ako se operacija nad cijelim brojevima promijeni u množenje, skup $G = \mathbb{Z}$ više ne bi bio grupa jer ne bi sadržavao inverze. Tada je neutralni element broj 1 jer je $x * 1 = 1 * x = x$ za svaki cijeli broj x. Ali na primjer, broj 2 iz $\mathbb{Z}$ nema inverz, kao što je $\frac{1}{2}$, jer to nije unutar skupa $\mathbb{Z}$. Slično, niti racionalni brojevi ne čine grupu s obzirom na množenje, ali sada je problematična samo nula. Naime, svi ostali racionalni brojevi imaju inverz za množenje, primjerice $\frac{2}{3}$

ima inverz $\frac{3}{2}$, ali nula nema jer ne smijemo dijeliti s nulom. Stoga izbacivanjem nule dobivamo strukturu grupe za množenje racionalnih brojeva bez nule. Slično i realni i kompleksni brojevi bez nule čine grupu za operaciju množenja.

Definicija 3.

- Red grupe G, označen s $|G|$, predstavlja broj elemenata u skupu G [2]. Ako G nije konačan skup, kažemo da je red grupe beskonačan.

Definicija 4.

- Neka je H neprazan podskup grupe G. Ako je H grupa s istom operacijom kao i G, tada je H podgrupa od G.

Primjer 5.

- Neka je G skup cjelobrojnih ostataka modulo 6, $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Tada je G grupa s obzirom na zbrajanje modulo 6. Naime, asocijativnost vrijedi jer vrijedi i za cijele brojeve, neutralni element je i dalje nula. Inverzi postoje jer primjerice inverz od ostatka 2 je ostatak 4, budući da je $2 + 4 = 6$, a 6 modulo 6 je točno 0. Red G je $|G|$=6. Podgrupa od G bila bi, na primjer, $H = \{0, 2, 4\}$ s obzirom na zbrajanje modulo 6.

Definicija 6.

- Grupa G je konačna grupa ako je $|G| < \infty$.

Primjer 7.

- Slično kao u primjeru 5, za svaki pozitivan cijeli broj $n > 1$, $G = \mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \dots, n-1\}$ je grupa ostataka pri dijeljenju s n, s obzirom na zbrajanje modulo n. To je konačna grupa jer je njen red $|G| = n$.

Definicija 8.

- Neka je G grupa, $H \subset G$ i $H \leq G$. Skup $aH = \{ah \mid h \in H\}$ za bilo koji $a \in G$ je lijeva klasa od H u G. Slično, skup $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ za bilo koji $a \in G$ je desna klasa od H u G. Lijeve klase od H u G za različite a i b su ili jednake ili disjunktne. Isto vrijedi i za desne klase.

Teorem 9.

- (Lagrangeov teorem): Ako je G konačna grupa i $H \leq G$, tada $|H|$ dijeli $|G|$. Osim toga, broj različitih desnih (ili lijevih) klasa od H u G je $\frac{|G|}{|H|}$ [2].
- Ako su G i H konačne grupe i $H \subset G$, tada je indeks H u G definiran kao $[G: H] = \frac{|G|}{|H|}$.

Primjer 10.

- Ako je $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i $H = \{0, 2, 4\}$, tada je $[G: H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$. Dakle, postoje dvije različite lijeve klase od H u G, a te dvije klase su $\{0, 2, 4\}$ i $\{1, 3, 5\}$.

Definicija 11.

- Ako su G i H grupe i $H \subset G$, tada je podgrupa H normalna podgrupa od G, označena s $H \trianglelefteq G$, ako za svaki a u G, $a^{-1}Ha = H$ (ili $aH = Ha$). Drugim riječima, lijeve i desne klase od H u G se podudaraju.

Primjer 12.

- Neka je $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i $H = \{0, 2, 4\}$. Za svaki $g \in G$, $g + H = H + g$ budući da je u Z_6 zbrajanje komutativno. Dakle, H je normalna podgrupa od G i piše se $H \trianglelefteq G$.
  U bilo kojoj komutativnoj grupi sve podgrupe su normalne.

Primjer 13.

- Neka su S_1, S_2, ..., S_n konačni skupovi. Tada vrijedi: $|S_1 \times S_2 \times ... \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|$.

Dokaz 14.

- Neka je $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k = \{(s_1, s_2, \ldots, s_k) \mid s_i \in S_i\}$. Tada, za s_1 postoji $|S_1|$ mogućnosti, za s_2 postoji $|S_2|$ mogućnosti, za s_3 postoji $|S_3|$ mogućnosti, i tako dalje. Prema principu množenja: $|S_1 \times S_2 \times ... \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot ... \cdot |S_k|$.

Definicija 15.

- Postojanje elementa g unutar grupe G, koji omogućava izražavanje cijele grupe G kao skupa $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, definira G kao cikličku grupu. Ovaj element

g, poznat kao generator, simbolizira se s $G = \langle g \rangle$. Oznaka C_n upućuje na cikličku grupu čiji je red n.

Primjer 16.

- Uzmemo li za primjer grupu $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, identificiramo $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ kao jednu od njenih cikličkih podgrupa. Ali i cijela Z_6 je ciklička jer je jednaka $\langle 1 \rangle$. Slično se vidi i da je grupa $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva s obzirom na operaciju zbrajanja ciklička jer je jednaka $\langle 1 \rangle$. Naime, svi cijeli brojevi dobiju se zbrajanjem broja 1 samog sa sobom i sa njegovim inverzom -1.

Definicija 17.

- Permutacija konačnog skupa X predstavlja bijektivnu funkciju koja svakom elementu iz X pridružuje jedinstveni element unutar istog tog skupa X, osiguravajući da svaki element ima svoj jedinstveni par, bez ponavljanja ili izostavljanja bilo kojeg elementa skupa.

Definicija 18.

- Ciklus predstavlja specifičan tip permutacije skupa $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ koji elemente premješta u niz $x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_1$ gdje svaki x_i pripada skupu X.

Definicija 19.

- Permutacije se mogu prikazati kroz kompozicije ciklusa, metodom poznatom kao notacija ciklusa. Ukoliko element ostaje na svom mjestu, odgovarajući ciklus se ne navodi. Identitetska permutacija prikazuje se sa (1).

Primjer 20.

- Razmotrimo skup $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i permutaciju $\sigma: X \to X$ gdje je $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 4$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 3$. Ova permutacija formira ciklus $1 \to 2 - 4 \to 3 \to 1$ što se u cikličkoj notaciji zapisuje kao (1243).

Definicija 21.

- Ciklus koji obuhvaća k elemenata naziva se k-ciklus. Posebno, permutacija koja se može izraziti kao ciklus s dva elementa zove se 2-ciklus ili transpozicija.

Teorem 22.

- Svaka permutacija može se zapisati kao kompozicija disjunktnih ciklusa, to jest, ciklusa koji nemaju zajednički element. Svaki pak ciklus se može zapisati kao kompozicija nekog broja transpozicija koje više nisu uvijek disjunktne. Pritom broj transpozicija u tome zapisu nije uvijek isti, ali u različitim zapisima parnost broja transpozicija se na mijenja.

Definicija 22.

- Permutacije se klasificiraju kao parne ili neparne na osnovi broja transpozicija koje ih čine; parne sadrže paran, a neparne neparan broj transpozicija. Prema prethodnom teoremu, parnost broja transpozicija ne ovisi o zapisu koji odaberemo.

Primjer 23.

- Analiziramo li permutaciju koja $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ preslikava u $2\ 1\ 4\ 3\ 5$, uočavamo da se ona može izraziti kao $(12)(34)$, isključujući (5) koji se preslikava u samog sebe. Ova permutacija je parna, s obzirom na to da se sastoji od dvije transpozicije.

Definicija 24.

- Skup svih permutacija skupa X, koje zajedno tvore grupu s obzirom na operaciju kompozicije, naziva se grupom permutacija skupa X.

Primjer 25.

- Za skup $T = \{1, 2, 3\}$ permutacija $\rho: T \to T$ koja preslikava $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 3$ i $\rho_3 = 1$ može se u potpunosti opisati kao $\rho = (123)$. Skup svih permutacija skupa T je $T_1 = \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\}$, gdje (1) predstavlja identitetsku permutaciju, označavajući neutralni element grupe permutacija od T.

Definicija 26.

- Grupa koja se sastoji od svih permutacija n elemenata, označena kao S_n, poznata je pod imenom simetrična grupa. Već smo ju spominjali kod simetrija.

Ova grupa uključuje svaku moguću permutaciju elemenata unutar skupa od n elemenata, čineći temelj za analizu permutacijskih struktura.

Definicija 27.

- Grupa A_n, koja obuhvaća sve parne permutacije skupa od n elemenata, poznata je kao alternirajuća grupa. Ova podgrupa simetrične grupe S_n sadrži permutacije koje su rezultat parnog broja transpozicija (zamjena elemenata), igrajući ključnu ulogu u teoriji grupa i njenoj primjeni.

Definicija 28.

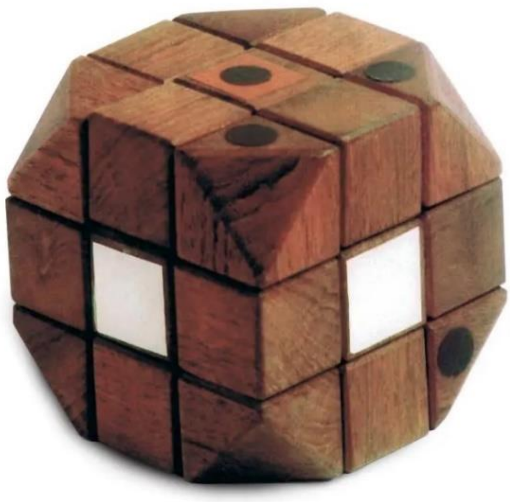
- Ako imamo grupu G i njenu normalnu podgrupu H, konstruiramo kvocijentnu grupu G/H kao skup svih klasa ekvivalencije $\{aH \mid a \in G\}$, gdje je operacija među tim klasama definirana kao $(aH)(bH) = abH$. Ova struktura omogućuje analizu grupa kroz prizmu njihovih podgrupa, olakšavajući razumijevanje njihove unutarnje strukture.

Primjer 29.

- Za $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i $H = \{0, 2, 4\}$ kvocijentna grupa G/H formira se kroz kombiniranje elemenata G s elementima H, rezultirajući u skupovima $\{0 + H, 1 + H, \ldots, 5 + H\}$, među kojima su samo dva različita pa se svode na $\{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$, pokazujući kako podgrupa H particionira originalnu grupu G.

5. Povijest i izum Rubikove kocke

Godine 1974. Erno Rubik, profesor arhitekture i mađarski kipar, izumio je trodimenzionalnu slagalicu koja je prvotno nazvana Magična kocka. Godine 1980. slagalica je bila licencirana od strane Rubika, a prodavala ju je strana kompanija Ideal Toy Corp. putem biznismena Tibora Lacziea i osnivača Seven Townsa, Toma Kremara. Iste godine osvojila je posebnu nagradu za Najbolju slagalicu u Njemačkoj kao igra godine. U narednih 29 godina, točnije do siječnja 2009. godine postala je najprodavanija slagalica na svijetu, sa prodanih 350 milijuna primjeraka širom svijeta. To joj je donijelo titulu najprodavanije igračke na svijetu.



Slika 10. Rubikova kocka - originalni prototip. Prvotni dizajn bio je izrađen od drveta, a kasnije su kvadrati obojeni kako bi njihovo kretanje bilo vidljivo [8].

Originalna klasična Rubikova kocka imala je šest strana, svako prekriveno s devet naljepnica u jednoj od šest osnovnih boja: bijeloj, crvenoj, plavoj, narančastoj, zelenoj i žutoj. Moderna verzija kocke koristi obojene plastične panele umjesto naljepnica, što sprječava da se boje gule ili blijede. U sadašnjim verzijama, bijela strana je smještena nasuprot žutoj, plava nasuprot zelenoj, a narančasta nasuprot crvenoj. Boje crvena, bijela i plava su raspoređene u smjeru kazaljke na satu. Na ranijim modelima, raspored boja varirao je od kocke do kocke. Boje se mogu miješati zahvaljujući unutarnjem mehanizmu, koji omogućuje neovisno okretanje svake strane kocke. Da bi se slagalica riješila, svako lice mora biti vraćeno tako da ima istu boju na svakoj strani.

Slične slagalice s različitim brojem strana, dimenzijama i rasporedom boja proizvedene su od strane različitih proizvođača, a neki od njih nisu povezani s Rubikom. Vrhunac popularnosti doseže osamdesetih godina, ali je i dan danas široko prepoznata i korištena. Organizirana su i natjecanja u brzom slaganju Rubikove kocke, na kojima se natječe za najbrže vrijeme u različitim kategorijama. Međunarodno tijelo koje nadgleda natjecanja Rubikove kocke, organizira natjecanja i priznaje svjetske rekorde naziva se World Cube Association te je osnovano 2003. godine [7].

Slika 11. Ernő Rubik [9].

1970-ih, Ernő Rubik radio je na Katedri za unutrašnji dizajn na Akademiji primijenjenih umjetnosti i zanata u Budimpešti. Iako se široko navodi da je Kocka izgrađena kao nastavno sredstvo za pomoć njegovim studentima u razumijevanju trodimenzionalnih objekata, njegova prava svrha bila je rješavanje strukturnog problema pomicanja dijelova neovisno, bez da se cijeli mehanizam raspadne u komadima. Rubik nije shvatio da je stvorio zagonetku sve dok prvi put nije izmiješao svoju novu kocku i pokušao je vratiti u početno stanje. Za svoju "Magic Cube" (Bűvös kocka na mađarskom), Rubik je podnio zahtjev za patent u Mađarskoj 30. siječnja 1975. godine, a patent HU170062 odobren mu je iste godine.

Prve testne serije magične kocke proizvedene su krajem 1977. godine i puštene su u prodaju u budimpeštanskim trgovinama igračaka. Magična kocka je bila sastavljena od međusobno zaključanih plastičnih dijelova koji su spriječili da se slagalica lako rastavi, za razliku od magnetnih kocki u dizajnu Nicholsa. S dozvolom Ernőa Rubika, poduzetnik Tibor Laczi donio je jednu kocku na njemački sajam igračaka u Nürnbergu u veljači 1979. godine u pokušaju popularizacije. Kocku je primijetio osnivač kompanije „Seven Towns“, Tom Kremer, te su potpisali ugovor s kompanijom „Ideal Toys“ u rujnu 1979. godine, kako bi magična kocka bila puštena u prodaju diljem svijeta. „Ideal“ je želio prepoznatljivo ime za zaštitni znak, što je stavilo Rubika u središte pozornosti jer je magična kocka preimenovana 1980. godine. Slagalica je međunarodno predstavljena na sajmovima igračaka u Londonu, Parizu, Nürnbergu i New Yorku, u siječnju i veljači 1980. godine.

Nakon međunarodnog predstavljanja, napredak kocke prema trgovinama igračaka na zapadu bio je privremeno zaustavljen kako bi se mogla proizvesti prema zapadnim sigurnosnim i pakirnim specifikacijama. Proizvedena je lakša verzija Kocke, a tvrtka „Ideal“ je odlučila promijeniti ime. Razmatrana su imena "Gordijski čvor" i "Inka zlato", ali je tvrtka naposljetku odabrala ime "Rubikova kocka", te je prva serija izvezena iz Mađarske u svibnju 1980. godine [7].

6. Mehanika Rubikove kocke

Standardna Rubikova kocka ima duljinu stranice od 5.7 centimetara.

Slagalicu sačinjava dvadeset i šest posebnih minijaturnih kockica, poznatih kao "cubies" ili "cubelets". Svaka od njih posjeduje skriveno unutarnje proširenje koje se zaključava s drugim kockicama, omogućujući im slobodno kretanje po različitim pozicijama. No, središnja kockica na svakoj od šest strana je zapravo samo jedna kvadratna strana; svih šest je povezano s jezgrom mehanizma. One služe kao osnovna struktura koja omogućava ostalim komadima da se uklope i rotiraju oko njih. Stoga, ukupno postoji dvadeset i jedan komad: jedan centralni komad s tri osi koje se presijecaju i drže šest središnjih kvadrata na mjestu, dopuštajući im rotaciju, te dvadeset manjih plastičnih komada koji se međusobno uklapaju kako bi tvorili slagalicu.

Svaka od šest središnjih kocki rotira se oko vijka (čvrsta veza) koji drži jezgreni komad, poznat kao "3D križ". Opruga između glave svakog vijka i odgovarajućeg komada stvara napetost prema unutra, tako da cijela montaža ostaje kompaktna, ali se može lako manipulirati. Vijak se može zategnuti ili olabaviti kako bi se promijenio osjećaj za slaganje kocke. Novije službene Rubikove kocke imaju klinove umjesto vijaka i ne mogu se podešavati.

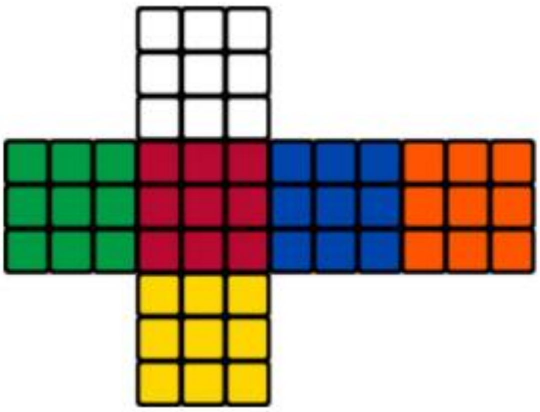
Slika 12. Prikaz djelomično rastavljene Rubikove kocke [7].

Kocku je relativno jednostavno rastaviti, obično tako da se gornji sloj okrene za 45°, a zatim da se jedna od bridnih kocki odvoji od ostala dva sloja. Stoga je proces "rješavanja" kocke jednostavan, jer ju možete rastaviti i ponovno sastaviti u riješenom stanju.

Na kocki se nalazi šest središnjih komada koji prikazuju jedno obojeno lice, dvanaest bridnih komada koji prikazuju dva obojena lica, te osam kutnih komada koji prikazuju tri obojena lica. Svaki komad ima jedinstvenu kombinaciju boja, ali ne sadrže sve moguće kombinacije. Položaj ovih komada u odnosu jedan na drugoga može se promijeniti okretanjem vanjske trećine kocke za 90°, 180° ili 270°, ali položaj obojenih strana u završenom stanju slagalice ne može se promijeniti: fiksiran je relativnim položajima središnjih kvadrata. Ipak, postoje i kocke s alternativnim rasporedom boja; na primjer, sa žutim licem nasuprot zelenom, plavim licem nasuprot bijelim, te crvenim i narančastim nasuprot jedno drugome [10].

7. Matematika i algoritmi Rubikove kocke

Klasična $(3 \times 3 \times 3)$ Rubikova kocka sastoji se od osam uglova i dvanaest bridova. Ukupno je $8! = 40320$ različitih načina za postavljanje kuteva kocke. Svaki od kuteva može imati tri različite orijentacije, ali samo sedam (od osam) mogu biti postavljeni neovisno; orijentacija osmog kuta ovisi o orijentacijama prethodnih sedam, što rezultira u $3^7 = 2187$ mogućih postavljanja. Kada je riječ o postavljanju bridova, postoji $\frac{12!}{2} = 239\,500\,800$ različitih mogućnosti, podijeljenih s 2 zbog uvjeta da bridovi moraju biti u parnoj permutaciji baš kao i kutevi. Jedanaest bridova može se okrenuti neovisno, dok okretanje dvanaestog brida ovisi o orijentacijama prethodnih bridova, dajući nam $2^{11} = 2048$ mogućih scenarija [8].



Slika 13. Prikaz svih strana Rubikove kocke u ravnini [8].

$$\mathbf{8! * 3^7 * \left(\frac{12!}{2}\right) * 2^{11} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000}$$

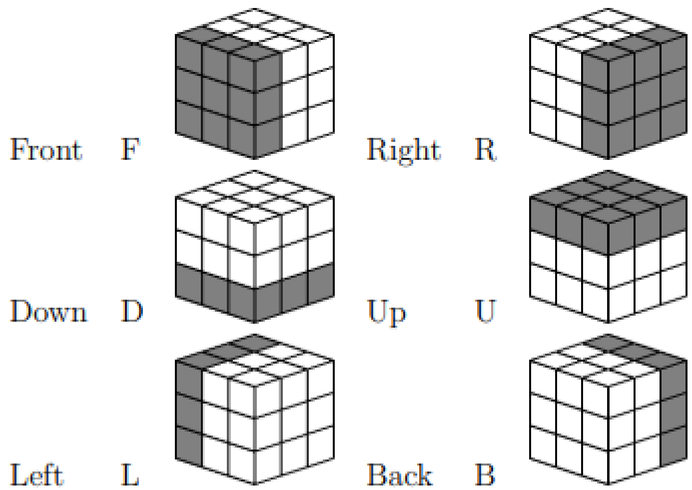
Postoji više od 43 trilijuna permutacija. Kako bismo to vizualizirali, zamislimo da netko ima jednu Rubikovu kocku za svaku permutaciju. Te kocke bi mogle pokriti površinu Zemlje 275 puta ili bi ih mogli složiti u toranj visine 261 svjetlosnu godinu. Brojka koju smo izračunali ograničena je na permutacije koje se mogu dobiti isključivo okretanjem strana Rubikove kocke. Uključujući permutacije koje možemo dobiti rastavljanjem kocke, broj permutacija postaje dvanaest puta veći [8].

$$\mathbf{8! * 3^8 * 12! * 2^{12} = 519\ 024\ 039\ 293\ 878\ 272\ 000}$$

Prema ovom izračunu, postoji oko 519 trilijuna mogućih rasporeda dijelova koji čine Rubikovu kocku, ali samo jedan od dvanaest takvih rasporeda je stvarno rješiv. To je zbog nedostatka niza poteza koji bi mogli zamijeniti samo jedan par dijelova ili rotirati pojedinačni kutni ili bridni dio. Iz tog razloga postoji dvanaest mogućih skupova dostupnih konfiguracija, koje se ponekad nazivaju "svemiri" ili "orbite", u koje se kocka može postaviti rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem.

Ove procjene temelje se na pretpostavci da su središnji kvadrati u fiksnom položaju. Ako smatramo da je okretanje cijele kocke drugačija permutacija, tada se svaki od prethodnih brojeva treba pomnožiti s 24 jer toliko ima rotacija kocke, kao što smo vidjeli u poglavlju o simetrijama kocke. Odabrana boja može biti na jednoj od šest strana, nakon čega jedna od susjednih boja može biti na jednoj od četiri pozicije, to određuje položaje svih preostalih boja [8].

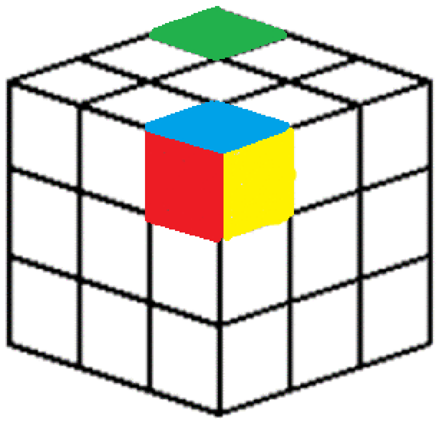
Za označavanje strana kocke koristit ćemo sljedeću notaciju:



Slika 14. Prikaz strana kocke koje su nam potrebne za algoritme [12].

Za označavanje rotacija strana kocke ćemo koristiti istu notaciju. Na primjer, F će označavati rotaciju prednje strane za $90°$ u smjeru kazaljke na satu. Rotacija u suprotnom smjeru bit će označena F'. Rotacija za $180°$ bit će označena dodavanjem indeksa 2F ili u suprotnom smjeru 2F'.

Za identifikaciju pojedinačnih kockica ili strana kockica, koristit ćemo jedno slovo za centralne kockice, dva slova za bridne kockice i tri slova za kutne kockice. Ova notacija pomaže nam da odredimo koje strane kocke pripadaju određenoj kockici. Prvo slovo od tri slova označava stranu kockice na koju se odnosi. Na primjer, na slici ispod, crveni kvadrat je na FUR, žuti na RUF, plavi na URF, a zeleni na ULB [12]:



Slika 15. Primjer FUR (crveni kvadrat), RUF (žuti), ULB (zeleni), URF (plavi). Modificirano prema izvoru [12].

Jedno od bitnih pitanja je najgore moguće zamršenje Rubikove kocke, odnosno raspored koji zahtijeva maksimalan broj minimalnih koraka za povratak u riješeno stanje. Taj broj naziva se „Božji broj". Naziv dolazi od pretpostavke da bi Bog koristio najučinkovitiji algoritam za rješavanje Rubikove kocke, onaj koji koristi najmanji niz poteza. Ako idemo kroz povijest Božjeg broja, prema Rokicki i sur. [14] godine 1980. utvrđena je donja granica od 18 poteza, dok je Morwen Thistlethwaite dokazao da je gornja granica 52 poteza. Devet godina kasnije, 1990. godine, Hans Kloosterman je spustio gornju granicu na 42 poteza. Godine 1992. Michael Reid je pokazao da je dovoljno 39 poteza, a samo jedan dan kasnije Dik Winters je pokazao da je dovoljno dva poteza manje, odnosno 37. U siječnju 1995. Michael Reid je dokazao da „superflip" kompozicija kocke zahtljeva 20 poteza. Smatra se da je upravo ta kompozicija najteža za rješavanje Rubikove kocke. Prema Moleru [15] „superflip" je konfiguracija Rubikove kocke u kojoj su svi kutni dijelovi (8 kutova), središnji dijelovi na svakoj strani (6 sredina) i središnji dio kocke u svojim početnim bojama. Međutim, 12 bridnih dijelova imaju boje okrenute na suprotne strane. To znači da su svi bridni dijelovi na svojim ispravnim mjestima, ali su okrenuti tako da boje na njima nisu pravilno orijentirane.

Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson i John Dethridge su 2010. godine objavili novi dokaz "Božjeg broja" te ga predstavili javnosti. S pomoću računala su pokazali da se sve moguće konfiguracije Rubikove kocke mogu riješiti s najviše 20 osnovnih poteza. Do tog su rezultata došli tako da su veliki problem podijelili na manje potprobleme koji su bili dovoljno mali da stanu u memoriju modernih računala, čime se ubrzao proces rješavanja. Koristeći znanje o simetrijama i program koji su sami razvili, uspješno su riješili svaki potproblem i naposljetku došli do konačnog rezultata. Istraživači su izjavili: "Trebalo je petnaest godina nakon predstavljanja kocke da se pronađe prva pozicija za koju je dokazano potrebno dvadeset poteza da se riješi; primjereno je da petnaest godina nakon toga dokažemo da je dvadeset poteza dovoljno za sve pozicije“ [14].

Postoji osnovna teorija grupa, odnosno osnovni skup algoritama, nazvanih makronaredbe, s pomoću kojih možemo naučiti složiti Rubikovu kocku. Prvo okretanje strane može se izvesti na 12 različitih načina (jer postoji 6 strana, a svaka se može okrenuti u 2 smjera). Zatim, drugi potez može okrenuti drugu stranu na 11 načina (pošto jedno od 12 okretanja poništava prvi potez). Ovaj proces se nastavlja, pa možemo koristiti Dirichletov princip da postavimo gornju granicu za maksimalni broj koraka potrebnih da se iz početnog stanja dosegne bilo koja permutacija kocke (broj mogućih ishoda mora biti veći ili jednak broju permutacija kocke):

$$12 * 11^{n-1} \geq 4.3252 * 10^{19}$$

Rješavanjem ove nejednakosti dobije se $n \geq 19$.

Metoda rješavanja koju ćemo koristiti nikada neće zahtijevati više od 100 poteza, najbrži "speedcuberi" koriste oko 60 poteza [12].

7.1. Permutacije

Različiti pokreti elemenata kocke mogu se shvatiti kao permutacije, tj. preuređenja, kockica. Bitno je naglasiti da svi pokreti kojima dođemo do iste konfiguracije kocke nazivaju se istim elementom grupe permutacija. Stoga se svaki pokret može prikazati kao permutacija. Na primjer, pokret FF-RR je isti kao permutacija (DF UF)(DR UR)(BR FR FL)(DBR UFR DFL)(ULF URB DRF). Ovdje je permutacija zapisana kao kompozicija disjunktnih ciklusa, kao što smo već spominjali u poglavlju o teoriji grupa.

O ovim permutacijama jednostavnije je razgovarati koristeći brojeve. Primjer permutacije:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

zapisane u kanonskoj cikličkoj notaciji je:

$$(1)(2\ 3\ 4).$$

Jedan ostaje na istom mjestu, a elementi dva, tri i četiri se zamjenjuju međusobno. Preciznije, dva prelazi na tri, tri prelazi na četiri, a četiri prelazi na dva.

Koraci za zapisivanje kombinacija permutacija u kanonskoj cikličkoj notaciji su sljedeći: ciklus se započinje s najmanjim elementom u nizu. Prati se premještanje objekata kroz permutaciju sve dok se ciklus ne završi, a potom se proces ponavlja za preostale elemente dok svi ciklusi ne budu zatvoreni.

Primjerice, u $(1\ 2\ 4)(3\ 5) \circ (6\ 1\ 2)(3\ 4)$ započinjemo komponirati permutaciju prema pravilu da se prvo radi desna permutacija, a zatim lijeva permutacija. U desnoj permutaciji 1 se premješta u 2, a zatim taj dva prelazi u 4 po lijevoj permutaciji. Broj 2 se premješta u 6, a zatim prelazi u 6 po lijevoj permutaciji. Sljedeći je broj tri koji se premješta u 4, te prelazi u 1. Broj 4 se premješta u 3 te prelazi u 5. Broj 5, s obzirom na to da nije zapisan u cikličkom obliku ostaje 5, a zatim u lijevoj permutaciji prelazi u

3. Naposljetku, broj 6 se premješta u broj 1, koji prelazi u broj 2. Rješenje kompozicije permutacija zapisujemo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ili u cikličkom obliku: $(1\ 4\ 5\ 3)(2\ 6)$.

Kako bi pokazali da kompozicija permutacija nije komutativna te da moramo paziti na redoslijed permutacija, izračunati ćemo istu kompoziciju, ali drugim redoslijedom.

$$(6\ 1\ 2)(3\ 4) \circ (1\ 2\ 4)(3\ 5)$$

Na ovaj način broj 1 se premješta u 2 te prelazi u 6. Zatim broj dva se premješta u 4 te prelazi u 3. Na ovaj način nastavljamo permutirati sve do rješenja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ili u cikličkom obliku : $(1\ 6)(2\ 3\ 5\ 4)$.

S obzirom na to da nismo dobili isto rješenje, pokazali smo da je važan redoslijed pisanja permutacija kao i činjenica da prvo djeluje desna permutacija, a zatim permutacija pisana s lijeve strane.

Ako permutacija P sadrži više ciklusa jednake duljine n, tada je red te permutacije n, jer primjena P točno n puta vraća početno stanje. Ako P ima više ciklusa različitih duljina, red je najmanji zajednički višekratnik duljina ciklusa, jer će toliko koraka ciklusa vratiti sve lance u njihova početna stanja. Evo nekoliko primjera [12]:

- $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 1) = (1\ 3\ 2)$ red 3
- $(2\ 3)(4\ 5\ 6)(3\ 4\ 5) = (2\ 4\ 3)(5\ 6)$ red 6
- $(1\ 2)$ red 2.

7.2. Paritet

Permutacije se mogu opisati i u smislu njihove parnosti, kao što smo već spomenuli u poglavlju u teoriji grupa. Svaki ciklus duljine n može se izraziti kao produkt transpozicija. To ćemo dokazati sljedećim primjerima:

$$(1\ 2) = (1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$$

Ovaj primjer se nastavlja za svaki ciklus bilo koje duljine.

Parnost ciklusa duljine n određena je brojem transpozicije koje sadrži. Ako je n paran, tada je potreban neparan broj transpozicija, što znači da je permutacija neparna, i obrnuto. Dakle, neparni ciklusi završavaju s razmjenom parnog broja kockica, a parni s neparnim.

Sljedeći dokaz je činjenica koja nam pokazuje parnost kocke te će nam biti od velike pomoći u rješavanju kocke:

Teorem: Kocka uvijek ima parnu parnost, odnosno paran broj kockica razmijenjenih iz početnog položaja.

Dokaz (indukcijom po broju rotacija ploha, n):

Osnovni slučaj: Nakon $n = 0$ rotacija neriješene kocke, nema razmijenjenih kockica, što je paran broj.

Neka je P_n: Nakon n rotacija, razmijenjen je paran broj kockica.

Pretpostavljamo P_n kako bi pokazali $P_n \rightarrow P_{n+1}$. Bilo koji niz rotacija sastoji se od pojedinačnih rotacija strana kocke. Kao primjer permutacije stvorene rotacijom strane, recimo potez F = (FL FU FR FD)(FUL FUR FDR FDL)

= (FL FU)(FL FR)(FL FD)(FUL FUR)(FUL FDR)(FUL FDL). Budući da se svaki ciklus duljine 4 u ovoj permutaciji može zapisati kao 3 transpozicije, ukupno je 6 transpozicija, što znači da je parnost rotacija strana parna. Ova činjenica vrijedi za bilo koju rotaciju strane, jer su sve rotacije strana, bez obzira na stranu koja se rotira, u osnovi jednake. Nakon n rotacija, kocka ima paran broj razmijenjenih kockica po pretpostavci indukcije. Budući da će $(n + 1)$-ta rotacija biti rotacija strane, bit će razmijenjen paran broj kockica. S obzirom na to da je već bio paran broj razmijenjenih kockica, parnost razmjene kockica se očuva i ostaje parna.

Dakle, bilo koja permutacija Rubikove kocke ima parnu parnost. Stoga, ne postoji rotacija koja će zamijeniti samo jedan par kockica. To znači da kada se zamijene dvije kockice, znamo da će biti razmijenjene i druge kockice [12].

7.3. Podgrupe

Dana je grupa R, a ako je $S \subseteq R$ bilo koji podskup grupe, tada je podgrupa H generirana s S najmanja podgrupa od R koja sadrži sve elemente iz S. Na primjer, $\{F\}$ generira grupu koja je podgrupa od R koja se sastoji od svih mogućih različitih permutacija kocke koje možete dobiti rotirajući prednje lice, $\{F, 2F, 3F, 4F\}$. Grupa generirana s $\{F, B, U, L, R, D\}$ je cijela grupa R. Ispod su neki primjeri generatora podgrupa od R:

- bilo koja rotacija pojedine strane, npr., $\{F\}$,
- bilo koje dvije suprotne rotacije strana, npr., $\{L, R\}$,
- dva poteza $\{RF\}$.

Definiramo red elementa g iz grupe kao najmanji prirodni broj m, takav da je $g^m = e$, identitet. Red elementa jednak je redu podgrupe $\langle g \rangle = \{g^n : n \in Z\}$ koju generira.

Stoga možemo koristiti pojam reda da bismo opisali nizove poteza kocke u smislu koliko puta moramo ponoviti određeni potez prije povratka na identitet. Na primjer, potez F generira podgrupu reda 4, jer rotacija strane 4 puta vraća na početno stanje. Potez $2F$ generira podgrupu reda 2, jer ponavljanje ovog poteza dva puta vraća na početno stanje. Slično tome, bilo koji slijed poteza oblikuje generator podgrupe koja ima određeni konačni red.

Budući da kocka može postići samo konačan broj rasporeda, a svaki potez miješa kockice, prije ili kasnije neki rasporedi će se početi ponavljati. Dakle, možemo dokazati da ako kocka počne s riješenom kombinacijom, tada primjenom jednog poteza više puta kocka će se na kraju vratiti u riješeno stanje nakon određenog broja ponavljanja.

Teorem: Ako kocka počne s riješenom kombinacijom te ako se izvede jedan niz poteza P sukcesivno, tada će se kocka na kraju vratiti u svoje riješeno stanje.

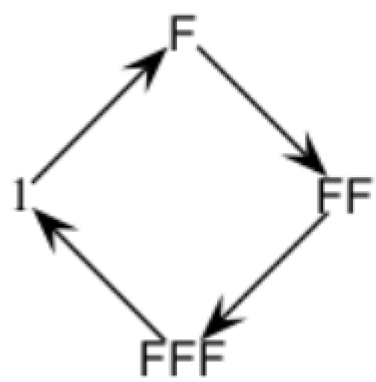
Dokaz: Neka je P bilo koji niz poteza kocke. Tada se nakon nekog broja m ponavljanja niza P, kocka nađe u istom rasporedu kao nakon k, gdje je $k < m$, Pritom m

ponavljanja je prvi put kad se raspored ponovno pojavljuje. Dakle, $P^k = P^m$ jer isti raspored znači istu permutaciju. Dakle, ako dokažemo da k mora biti 0, dokazali smo da se kocka ponovno vrati u P^0, tj. u riješenu kombinaciju. Ako je $k = 0$, tada smo gotovi, jer je $P^0 = 1 = P^m$. Sada moramo dokazati da k mora biti 0. Ako bi bilo $k > 0$: te ako primijenimo niz poteza P^{-1} na oba P^k i P^m dobivamo isto, jer su oba rasporeda P^k i P^m isti. Tada $P^k P^{-1} = P^m P^{-1} \Rightarrow P^{k-1} = P^{m-1}$. Ovo je u kontradikciji, jer smo rekli da je m, prvi put kada se rasporedi ponavljaju, tako da mora biti $k = 0$ i svaki niz poteza će se na kraju vratiti u početno stanje prije nego što se opet ponove drugi rasporedi [12].

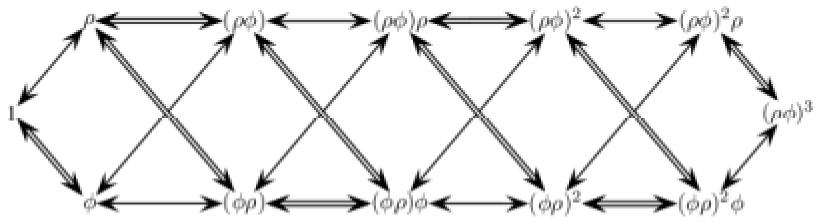
7.4. Cayleyev graf

Koristan graf za dublje razumijevanje strukture grupa i podgrupa je Cayleyev graf. U nastavku navodim karakteristike koje opisuju Cayleyev graf grupe G:

- Svaki $g \in G$ predstavlja jedan vrh.
- Boja c_s dodijeljena je svakom generatoru grupe $s \in S$.
- Za svaki $g \in G$ i generator grupe $s \in S$, elementi koji odgovaraju g i gs su povezani usmjerenim bridom boje c_s.



Slika 16. Prikaz Cayleyevog grafa za podgrupu generiranu s F [12]. Tu je jedan generator pa su svi bridovi grafa iste boje.



Slika 17. Prikaz poteza $\varphi = F\text{-}F$ i $\rho = RR$ oblikuju graf (napomena: $\varphi^2 = \rho^2 = 1$) [12]. Ovdje se radi s dva generatora pa imamo bridove dvaju boja koje su označene običnim ili dvostrukim strelicama.

Kako se situacija mijenja kada pokušamo nacrtati graf za U? Ili RR, BB? Oni će imati iste Cayleyeve grafove kao i oni prikazani gore, tim redom. Ako dvije grupe dijele identičan Cayleyev graf, to ukazuje na sličnu strukturu između njih te ih zovemo izomorfnim. Dvije izomorfne grupe imat će isti broj elemenata i isti utjecaj na kocku. Primjerice, izvođenje $FF\ RR$ proizvodi isti rezultat kao i rotacija kocke tako da je strana L okrenuta prema naprijed, a zatim slijedi izvođenje $RRBB$ [12].

7.5. Komutator

Operacije poteza na Rubikovoj kocki su nekomutativne, jer su i permutacije nekomutativne s obzirom na kompoziciju. Na primjer, prvo rotiranje prednje strane (F), a zatim desne strane (R) kako bi izvršili potez $F\text{-}R$, što je različito od rotiranja desne strane prije prednje strane, ili RF. Koristan alat za opisivanje relativne komutativnosti niza operacija je komutator, $PMP^{-1}M^{-1}$, označen s $[P, M]$, gdje su P i M dva poteza kocke. Ako P i M komutiraju, tada je njihov komutator identitet, jer se izrazi mogu preurediti tako da P poništi P^{-1}, kao i M. Nosač operacije na kocki obuhvaća sve kockice koje mijenja. Dvije operacije su komutativne ili ako izvršavaju istu operaciju ili ako je nosač $(P) \cap$ nosač $M = \emptyset$, odnosno, ako svaki potez utječe na potpuno različite skupove kockica. Ako komutator nije identitet, tada možemo mjeriti "relativnu komutativnost" brojem kockica koje se promijene primjenom komutatora. Proučavanje presjeka nosača dviju operacija daje uvid u ovu mjeru. Korisni parovi poteza imaju samo mali broj kockica promijenjenih zajednički, i primjećujemo makro-poteze koji uključuju komutatore koji se iznova i iznova pojavljuju. Postoji korisni teorem o komutatorima koji nećemo dokazivati, ali ćemo ga koristiti:

Teorem:

Ako se nosač (g) ∩ nosač (h) sastoji od samo jedne kockice, tada je $[g, h]$ ciklus od tri elementa. Ovdje su neki korisni građevni blokovi za komutatore koji se mogu koristiti za izgradnju makropoteza:

- Potez $R'DRFDF'$ okreće kockicu sa gornje strane u desnom donjem kutu na desnu stranu u lijevi gornji kut.
- Potez FF okreće prednju stranu za $180°$.
- Potez $R'DR$ je ciklus tri kuta [12].

7.6. Konjugacija

Pretpostavimo da je M neki niz koji izvršava operaciju na kocki, kao što je na primjer ciklus od tri bridne kockice. Tada kažemo da je za neki potez P, PMP^{-1} konjugacija poteza M s porezom P. Konjugacija grupnog elementa još je jedan koristan alat koji će nam pomoći u opisu i izgradnji korisnih makropoteza.

Krenimo s nekoliko korisnih definicija:

Relacija ekvivalencije je bilo koja relacija $\sim$ među elementima skupa koja je:

- Refleksivna: $x \sim x$,
- Simetrična: Ako $x \sim y$, onda je $y \sim x$,
- Tranzitivna: Ako $x \sim y$ i $y \sim z$, onda je $x \sim z$.

Neka je relacija $\sim$ konjugacija. Dakle, $x \sim y$, ako za neki $g \epsilon G$ vrijedi $gxg^{-1} = y$. Evo kako dokazujemo da je konjugacija relacija ekvivalencije:

- Refleksivna: $gxg^{-1} = x$ ako je $g = 1$, stoga je $x \sim x$,

- Simetrična: Ako je $x \sim y$, tada je $gxg^{-1} = y$, pa množenjem obje strane s g, s desne strane i s g^{-1}, s lijeve strane dobivamo $x = g^{-1}yg$.
- Tranzitivna: Ako je $x \sim y$ i $y \sim z$, tada je $y = gxg^{-1}$ i $z = hyh^{-1}$, pa je $z = hgxg^{-1}h^{-1} = (hg)x(hg)^{-1}$, pa je $x \sim z$.

Klasa ekvivalencije $c(x)$, gdje je $x \epsilon G$, jest skup svih $y \epsilon G$: $y \sim x$. Možemo podijeliti G u disjunktne klase ekvivalencije, odnosno konjugacijske klase.

Dva permutacijska elementa R su konjugirani ako imaju istu strukturu ciklusa [12].

7.7. Rješavanje kocke (početnički algoritam)

Osnovna terminologija kod slaganja Rubikove kocke: Rotacije koje idu u smjeru suprotno kazaljke na satu označene su sa '. Rotacije u smjeru kazaljke na satu i rotacije koje idu suprotno od smjera kazaljke na satu su:

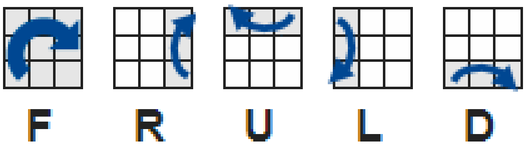
F, F' – prednja stranica kocke

R, R' – desna stranica kocke

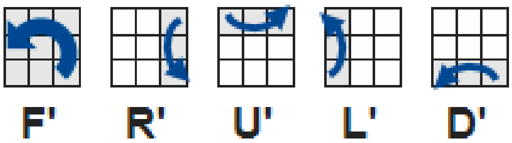
U, U' – gornja stranica kocke

L, L' – lijeva stranica kocke

D, D' – donja stranica kocke.



Slika 18. Prikaz rotacija strana kocke u smjeru kazaljke na satu [13].

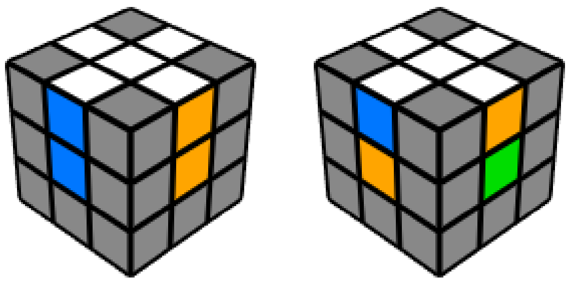


Slika 19. Prikaz rotacija strana kocke u smjeru suprotno kazaljke na satu [13].

7.7.1. Prvi korak (prvi sloj - bridovi)

Najlakši dio kod slaganja Rubikove kocke je rješavanje prvog sloja. Ovaj korak se rješava intuitivno jer ne postoje riješeni dijelovi kocke na koje treba paziti. Odaberemo jednu boju s kojom želimo započeti, u ovom primjeru će to biti bijela boja.

Prema boji središnjih kockica koje nikad ne mijenjaju mjesto možemo odrediti gdje postaviti koju kockicu. Svaka bridna bijela kockica na bijelom križiću koji složimo mora odgovarati boji bočnih lica kocke kao što je prikazano na slici [13].



Slika 20. Lijevo prikaz dobro složenog bijelog križića, desno prikaz loše složenog bijelog križića [13].

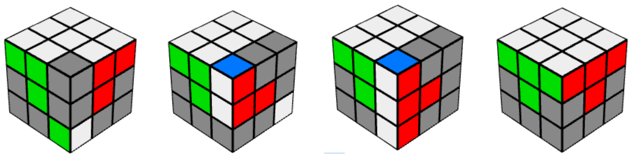
7.7.2. Drugi korak (prvi sloj – kutevi)

Drugi korak ne zahtijeva dugačke algoritme samo trebamo primijeniti nekoliko kratkih permutacija koje možemo lako zapamtiti.

Sada ćemo prikazati nekoliko primjera s kojima se možemo suočiti dok slažemo prvi sloj.

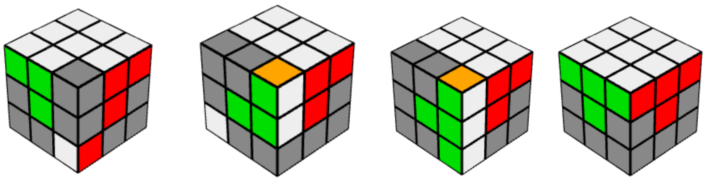
Postoje tri slučaja:

1. Bijela kockica na desnoj strani [13]:



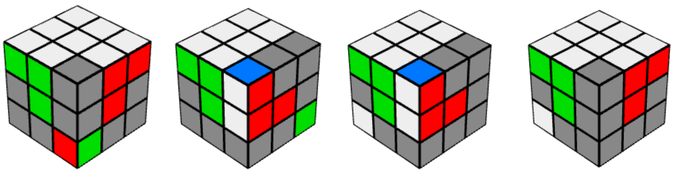
R' D' R

2. Bijela kockica okrenuta prema nama [13]:

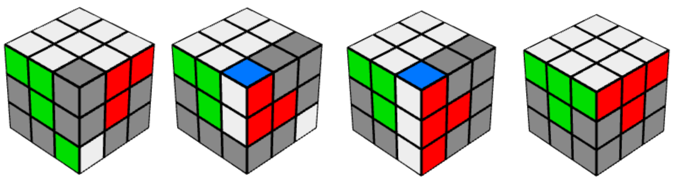


F D F'

3. Bijela kockica okrenuta prema dolje [13].



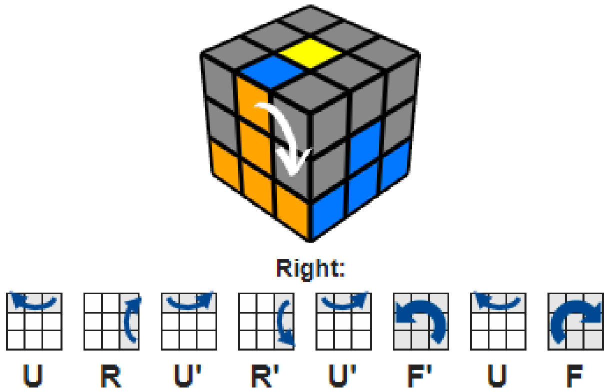
R' D2' R D



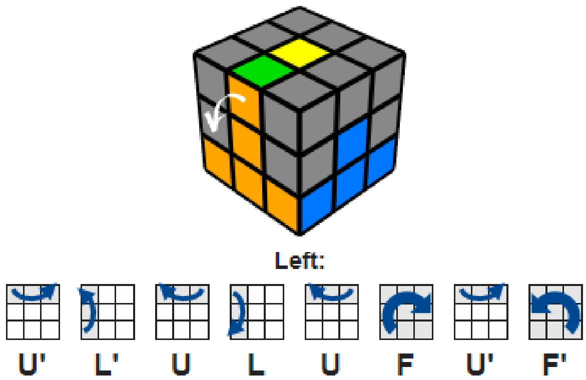
R' D' R

7.7.3. Treći korak (drugi sloj - F2L „First two layer's)

Da bi došli do ovog dijela mogli smo raditi intuitivno bez algoritma koji bi trebali pamtiti, no u ovoj fazi rješavanja drugog sloja Rubikove kocke ljudi često pogriješe jer postoji previše poteza koje bi trebali predvidjeti za redoslijed da bi dovršili korak. Stoga ćemo u ovom dijelu naučiti dva algoritma kojima dovodimo bridnu kockicu sa žutog sloja na drugi sloj bez da pomiješamo bijeli sloj koji je već riješen. Do ovog dijela rješavanja bijela boja nam je bila okrenuta prema gore te ju sada okrećemo prema dolje [13].



Slika 21. Prikaz desnog algoritma [13].



Slika 22. Prikaz lijevog algoritma [13].

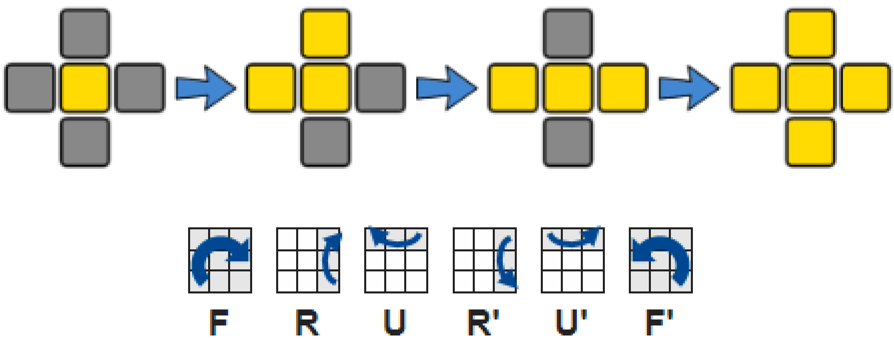
Slika 23. Prikaz krive orijentacije bridne kockice [13].

Ako nam se dogodi kriva orijentacija bridne kockice, sve što trebamo napraviti je desni algoritam napraviti dva puta te između ta dva desna algoritma ubaciti potez $U2$ što bi u konačnici izgledalo ovako: $\mathrm{U\ R\ U'\ R'\ U'\ F'\ U\ F\ U2\ U\ R\ U'\ R'\ U'\ F'\ U\ F}$.

7.7.4. *Četvrti korak (žuti križić)*

U ovom koraku želimo oblikovati žuti križić na vrhu kocke. Postoji kratki algoritam koji ćemo koristiti: $\mathrm{F\ R\ U\ R'\ U'\ F'}$.

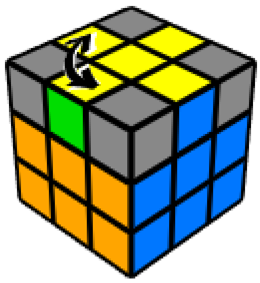
Osim riješenog položaja postoje tri moguće pozicije žutih kockica na vrhu: točka, „L“ oblik ili linija što je prikazano na slici 1.22. Ako nam se pojavi točka, algoritam $\mathrm{F\ R\ U\ R'U'F'}$ ćemo ponoviti tri puta. Ako nam je na vrhu „L“ žuti oblik algoritam $\mathrm{F\ R\ U\ R'\ U'\ F'}$ ćemo ponoviti dva puta. U ovom koraku orijentacija kocke nam je važna dok primjenjujemo algoritam što će biti prikazano na sljedećim slikama [13]. Uočimo da zbog parnosti permutacije kocke, na žutoj strani se ne može pojaviti neparan broj žutih kockica ne brojeći centralnu, nego ili niti jedna (točka), ili dvije (L i linija), ili sve četiri (složeni križić).



Slika 24. Prikaz mogućih pozicija žutih kockica i algoritam koji primjenjujemo [12].

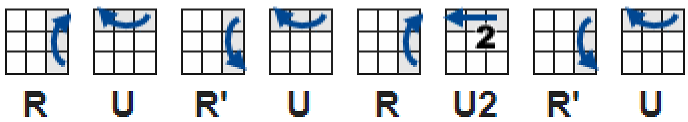
7.7.5. Peti korak (zamjena bočnih središnjih dijelova sa žutim rubovima)

U prethodnom koraku smo složili žuti križić na gornjoj (zadnjoj koja nam je ostala) strani Rubikove kocke s tim da vrlo vjerojatno se svi žuti rubovi ne poklapaju s bojama bočnih središnjih dijelova. U ovom dijelu rješavanja ćemo to riješiti [13].



Slika 25. Prikaz zamjene bočnih središnjih dijelova sa žutim rubovima [13].

Algoritam kojim rješavamo prethodnu problematiku je sljedeći:



Slika 26. Prikaz algoritma zamjene bočnih središnjih dijelova sa žutim rubovima [13].

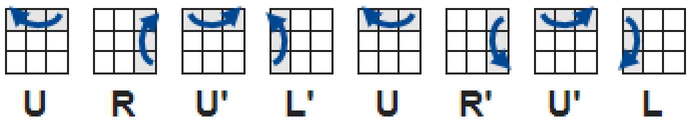
U ovom dijelu rješavanja problematike, prethodni algoritam ćemo ponekad morati upotrijebiti dva puta zaredom da bi dobili točnu zamjenu bočnih središnjih dijelova sa žutim rubovima.

7.7.6. Šesti korak (postavljanje žutih kockica na točnu poziciju)

Ovo je predzadnji korak, te uskoro završavamo sa slaganjem kocke, ostale su nam samo žute kutne kockice. U ovom koraku žute kutne kockice postavljamo na pravo mjesto, orijentacija nam nije važna. Orijentaciju rješavamo u zadnjem koraku [13].

Slika 27. Prikaz Rubikove kocke prije korištenja algoritma [13].

Prije korištenja algoritma, ako je samo jedna kutna kockica u ispravnom položaju, moramo biti sigurni da je ta kockica okrenuta prema nama u gornjem desnom kutu. Zatim izvršavamo sljedeći algoritam:



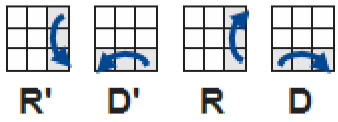
Slika 28. Prikazuje algoritam koji koristimo kada nam je žuta kockica u desnom gornjem kutu [13].

Zbog pariteta permutacija broj postavljenih žutih kockica je ograničen na tri slučaja:

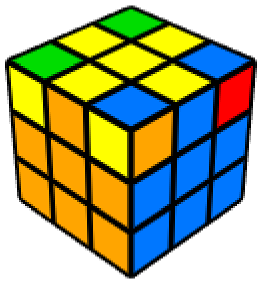
1. Niti jedna žuta kutna kockica nije u ispravnom položaju.
2. Samo je jedna u ispravnom položaju.
3. Sve četiri su u ispravnom položaju [13].

7.7.7. Sedmi korak (orijentacija zadnjeg sloja Rubikove kocke)

U zadnjem koraku držimo kocku u ruci tako da nam na gornjem sloju, u desnom donjem kutu bude dio koji želimo orijentirati, te dva ili četiri puta izvršavamo sljedeći algoritam:



Slika 29. Prikaz algoritma orijentacije zadnjeg sloja [13].



Slika 30. Prikaz zadnjeg sloja na kojem vršimo prethodni algoritam [13].

Dok izvršavamo algoritam koji smo naveli, može se činiti da smo izmiješali cijelu kocku, te bi trebali pripaziti da algoritam uvijek izvršimo do kraja i ne zaboravimo izvršiti zadnju rotaciju u algoritmu, a to je potez D. Nakon što izvršimo algoritam 2 do 4 puta koliko je potrebno da kocka na gornjem sloju dođe na svoje mjesto u desni donji kut, rotiramo gornji sloj s potezom U ili U' te orijentiramo kockicu koja nam još nije složena na gornjem sloju da nam bude u gornjem desnom kutu te izvršavamo algoritam ponovno 2 do 4 puta. Tako ponovimo da bi dobili riješen gornji sloj. Moramo dobro pripaziti da ne vrtimo cijelu kocku dok izvršavamo 7. korak jer mnogo ljudi na zadnjem koraku često pogriješi [13].

8. Zaključak

Rubikova kocka, od svog izuma do danas, predstavlja intrigantan spoj matematike, algoritama i simetrije. Kroz proučavanje simetrija kocke i njihovih grupa, stječe se dublje razumijevanje matematičkih struktura i njihovih primjena. Mehanika Rubikove kocke pokazuje kako složenost i jednostavnost mogu koegzistirati u jednom objektu, pružajući izazov i zabavu istovremeno. Matematika i algoritmi, ključni za njeno rješavanje, demonstriraju važnost permutacija, pariteta i podgrupa, dok Cayleyev graf ilustrira grupe. Komutatori i konjugacije, napredni matematički pojmovi, pokazuju dubinu analize potrebne za razumijevanje i rješavanje kocke. Ograničenja u rješavanju kocke, poput broja poteza potrebnih za bilo koje stanje, izazivaju daljnja istraživanja i inovacije. U konačnici, Rubikova kocka nije samo igračka, već složeni matematički objekt koji potiče analitičko razmišljanje i kreativnost. Njeno proučavanje obogaćuje razumijevanje simetrije, algoritama i matematike, čineći je neizostavnim dijelom matematičke edukacije i istraživanja.

9. Literatura

[1] Bašić M., „Simetrije“, video predavanje, 2020. Dostupno na: https://www.showme.com/sh?h=exxUbrs (pristupljeno 05.04.2024.)

[2] Daniels L., „Group Theory and the Rubik's Cube“, Lakehead University Thunder Bay, Canada, 2014. Dostupno na: https://www.lakeheadu.ca/sites/default/files/uploads/77/docs/Daniels_Project.pdf (pristupljeno 05.04.2024.)

[3] Chen J., „Group Theory and the Rubik’s Cube”., bilješke s predavanja na Honors Summer Math Camp, Texas State University, 2004. Dostupno na: https://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik's%20Cube.pdf (pristupljeno 14.05.2024.)

[4] McShane P., O’Brien D., Thornton S., „The Group of Symmetries of the Cube”, poster, University of Galway, Irska, 2019. Dostupno na: https://maths.nuigalway.ie/~rquinlan/groups/exhibition/mcshane_obrien_thornton.pdf (pristupljeno 10.05.2024.)

[5] Ronan M., „The Rotations of a Cube”, University of Birmingham, Dostupno na: https://www.markronan.com/mathematics/symmetry-corner/the-rotations-of-a-cube/ (pristupljeno 10.05.2024.)

[6] Gallian J.A., „Contemporary abstract algebra“, University of Minnesota Duluth, USA, 2015. Dostupno na: https://github.com/dtbinh/OpenCourse/blob/master/AbstractAlgebra/Contemporary%20Abstract%20Algebra%209th%20Joseph%20A.%20Gallian.pdf (pristupljeno: 10.05.2024.)

[7] Meng E., „Rubik’s cube”, 2019. Dostupno na: https://www.academia.edu/39871813/Rubiks_Cube (pristupljeno: 12.05.2024.)

[8] Alter A., „He Invented the Rubik’s Cube. He’s Still Learning from It.”, *New York Times*, 2020. Dostupno na: https://www.nytimes.com/2020/09/16/books/erno-rubik-rubiks-cube-inventor-cubed.html (pristupljeno: 12.05.2024.)

[9] Singh-Kurtz S. „They Just Don't Make Men Like They Used To", *The Cut*, 2020. Dostupno na: https://www.thecut.com/2020/09/rubiks-cube-inventor-erno-rubik-on-his-new-book-cubed.html (pristupljeno: 13.05.2024.)

[10] Hofstadter D.R., „Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern", New York, Basic Books, 1985.

[11] Schönert M., „Analyzing Rubik's Cube with GAP". Dostupno na: http://www.gap-system.org/Doc/Examples/rubik.html (pristupljeno: 12.05.2024.)

[12] „The Mathematics of the Rubik's Cube", 2009. Dostupno na: https://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf (pristupljeno: 10.05.2024.)

[13] Ferenc D., „How to solve the Rubik's Cube?". Dostupno na: https://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/ (pristupljeno: 11.05.2024.)

[14] Rokicki T., Kociemba H., Davidson M., Dethridge J., „God's Number is 20". Dostupno na: https://www.cube20.org/ (pristupljeno: 18.05.2024.)

[15] Moler C., „Rubik's Cube Superflips and God's Number", 2022. Dostupno na: https://blogs.mathworks.com/cleve/2022/09/05/rubiks-cube-superflips-and-gods-number/#eece078d-6a7b-423f-9218-5476dc32fcc1 (pristupljeno 18.05.2024.)

10. Sažetak

Završni rad "Simetrije, matematika i algoritmi Rubikove kocke" istražuje složenost i simetrije koje stoje iza Rubikove kocke, slagalice koja je intrigirala ljude diljem svijeta. Rad sam započeo s razmatranjem osnovnih matematičkih koncepta poput grupa i simetrija te sam ih primijenio na analizu strukture kocke. Istražio sam algoritme koji se koriste za rješavanje Rubikove kocke, pri čemu sam koristio matematičke principe kako bih optimizirao njihovu učinkovitost. Posebnu pažnju posvetio sam simetričnim svojstvima Rubikove kocke te kako razumijevanje istih može poboljšati učinkovitost rješavanja. Kroz ovaj rad, demonstrirao sam kako matematika igra ključnu ulogu u razumijevanju i rješavanju problema Rubikove kocke, nudeći dublji uvid u njezinu složenost i ljepotu.

Ključne riječi: Rubikova kocka, simetrije, algoritmi, teorija grupa, permutacije, paritet, podgrupe, Cayleyev graf, komutator, mehanika Rubikove kocke, kombinatorika.

Summary

The final paper "Symmetries, Mathematics, and Algorithms of the Rubik's Cube" explores the complexities and symmetries behind the Rubik's Cube, a puzzle that has intrigued people around the world. I began my work by considering basic mathematical concepts such as groups and symmetries and applied them to the analysis of the cube's structure. I researched the algorithms used to solve the Rubik's Cube, utilizing mathematical principles to optimize their performance. Special attention was given to the symmetrical properties of the Rubik's Cube and how understanding them can improve the efficiency of solving. Through this paper, I have demonstrated how mathematics plays a key role in understanding and solving the Rubik's Cube problem, offering a deeper insight into its complexity and beauty.

Key words: Rubik's Cube, symmetries, algorithms, group theory, permutations, parity, subgroups, Cayley graph, commutator, mechanics of the Rubik's Cube, combinatorics.