Načini obračuna kamata

Nasipak, Martina

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Fakultet ekonomije i turizma
„Dr. Mijo Mirković“

MARTINA NASIPAK

NAČINI OBRAČUNA KAMATA

Završni rad

Pula, 2020.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli

Fakultet ekonomije i turizma

„Dr Mijo Mirković“

MARTINA NASIPAK

NAČINI OBRAČUNA KAMATA

Završni rad

JMBAG: 0303071045, izvanredni student

Studijski smjer: Financijski management

Predmet: Matematika za ekonomiste

Znanstveno područje: Prirodne znanosti

Znanstveno polje: Ekonomija

Znanstvena grana: Ekonomska matematika

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Danijela Rabar

Pula, kolovoz 2020.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisana Martina Nasipak, kandidatkinja za prvostupnika Poslovne ekonomije ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

____

U Puli, __________________ 2020. godine

IZJAVA
o korištenju autorskog djela

Ja, Martina Nasipak, dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj završni rad pod nazivom „Načini obračuna kamata“ koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.
Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, _______________

Potpis

____

SADRŽAJ

1. UVOD

Matematiku je gotovo nemoguće definirati na jednostavan način. Po svojoj prilici ona je stroga, principijelna, egzaktna i dokažljiva, utemeljena isključivo na dokazanoj provjeri svojih pretpostavki. Njen nastanak seže daleko u prošlost, a njeno postojanje fundament je mnogih prirodnih znanosti. Sama pojava kamatnog računa kao segmenta jedne njene sastavnice - financijske matematike, veže se uz drevna vremena, već uz treće tisućljeće prije Krista kada novac, u svom pojavnom obliku, nije ni postojao, a kamatni se račun koristio isključivo prilikom davanja naturalnih kredita, odnosno posudbe raznih dobara poput tekstila, metala i hrane debitoru uz obvezu vraćanja primljene količine robe uvećane za određeni postotak. Primjena matematike u znanosti postala je svojevrsnim pokretačem razvoja nove matematike pa se tako, sustavno i paralelno s razvojem suvremene ekonomije i implementacije matematike u razne znanstvene discipline, pojavio i noviji, novčani oblik kreditiranja što posljedično dovodi i do nastanka novih načina obračuna kamata.

Tema ovog završnog rada su načini obračuna kamata koje vjerovnik po osnovi ugovora i zakonskih propisa zaračunava i naplaćuje dužniku na posuđen novac za razdoblje kapitalizacije koje se definira ugovorom ili propisuje zakonom.

Cilj ovog rada je pokazati načine i metode na koji se kamate i kamatne stope obračunavaju i uz pomoć primjera pojasniti njihovu važnost.

U svrhu izrade završnog rada prikupljena je i analizirana znanstvena i stručna literatura vezana uz pojam kamatnog računa. Korišteni su sekundarni izvori podataka i sljedeće metode znanstvenog istraživanja: deskriptivna metoda, komparativna metoda, metoda klasifikacije te analiza i sinteza.

Završni rad podijeljen je u pet poglavlja koja uključuju uvod i zaključak. U uvodnom dijelu je definiran predmet istraživanja, naveden je cilj istraživanja i metode korištene u radu. Drugi dio se bavi načinima obračuna kamata, a u trećem dijelu je razrađena njihova primjena u složenom i jednostavnom kamatnom računu. U četvrtom poglavlju će se detaljnije pojasniti što su nominalni, konformni, relativni i ekvivalentni kamatnjaci te kontinuirano, odnosno neprekidno ukamaćivanje. Peti dio završnog rada je zaključak u kojem se ukratko opisuje obrađena tematika.

2. KAMATNI RAČUN

Kamatni račun podrazumijeva postupak obračunavanja kamata, odnosno novčanog iznosa kojeg debitor plaća vjerovniku kao naknadu za posuđen novac. Razdoblje ukamaćivanja (kapitalizacije) jest obračunsko razdoblje za koje se kamate obračunavaju. Kamatna stopa ili kamatnjak ugovara se između kreditora i debitora, odnosno vjerovnika i dužnika, a može biti fiksna ili varijabilna. Postoje dva načina obračuna kamata:

- dekurzivan obračun - kod kojeg se kamate obračunavaju na kraju razdoblja kapitalizacije na iznos s početka razdoblja i
- anticipativan obračun - pri kojem se obračun kamata obavlja na početku obračunskog razdoblja od iznosa s kraja tog razdoblja.

Obračun kamata može biti jednostavan ili pak složen. Kada se kamata obračunava za svako elementarno razdoblje kapitalizacije na istu glavnicu, govorimo o jednostavnom kamatnom računu, a ako se pak za svako obračunsko razdoblje kamate obračunavaju i pripisuju glavnici tako da se već u sljedećem razdoblju ukamaćivanja kamata obračunava na tako uvećanu glavnicu, govorimo o složenom kamatnom računu.[1] Kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje kapitalizacije (razdoblje ukamaćivanja) kroz vrijeme trajanja kapitalizacije od iste vrijednosti glavnice nazivaju se jednostavne kamate. One predstavljaju postotak glavnice koji dužnik mora platiti vjerovniku kao naknadu za posuđeni iznos novca.[2]

Dakle, možemo zaključiti da obračun kamata može biti: jednostavan i dekurzivan ako ne uključuje kamate ni prethodnih niti tekućeg razdoblja; jednostavan i anticipativan ako ne uključuje kamate prethodnih, a uključuje one tekućeg razdoblja; složen

[1] Gruić i dr., 2011., str. 7.
[2] Dabčević i dr., 1996., str. 115.

dekurzivan ako uključuje kamate prethodnih, ali ne i tekućeg razdoblja te složen i anticipativan ako uključuje kamate i prethodnih i tekućeg razdoblja.[3]

2.1. Jednostavni kamatni račun

Postoji uvriježeno mišljenje da je jednostavni kamatni račun jednostavniji od složenog. No, u svakodnevnoj praksi to baš i nije tako. Primjena jednostavnog kamatnog računa u suštini podrazumijeva smanjivanje kamatne stope i onemogućuje kapitalizaciju zateznih kamata, budući da se zatezne kamate ne mogu ukamatiti sve dok nije plaćena glavnica. Prema Zakonu o obveznim odnosima ukoliko dužnik, uz glavnicu duguje i kamate i troškove, uračunavanje se vrši tako što se prvo namiruju troškovi, potom kamate i tek naposljetku glavnica. Za dužnika je to očigledno povoljniji način obračuna, no sasvim je izvjesno i da ne pogoduje vjerovniku. Međutim, ta se nepravilnost ipak može korigirati implementacijom složenog kamatnog računa.[4] Drugim riječima, jednostavni kamatni račun bismo mogli definirati i kao takav kamatni račun kod kojega se glavnica za svako razdoblje ne mijenja zbog kamata, odnosno takav račun kod kojeg u glavnicu za obračun kamata ne ulaze kamate prethodnih razdoblja.[5] Kod izračunavanja jednostavnih kamata, obračun kamata može biti dekurzivan ili anticipativan. Jednostavne kamate najčešće se koriste kod kratkoročnih financijskih rješenja, za razdoblja manja od godinu dana. U praksi se zbog svoje kratkotrajnosti u formulama najčešće računaju po danima i mjesecima o čemu će nešto više riječi biti kasnije.

U ovom načinu obračuna koristimo sljedeće oznake:
C_0 – početna vrijednost (glavnica),
n – broj razdoblja ukamaćivanja,
p − kamatnjak,
C_n – konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja,
K_n – kamata na kraju n-tog razdoblja (ili K− ukupne kamate).

[3] Nogić, 2014., str. 43.
[4] Šego i Lukač, 2011., str. 272.
[5] Nogić, 2014., str. 42. - 43.

Formulu za jednostavni kamatni račun dobivamo iz osnovnog razmjera postotnog računa:

$$S : 100 = P : p,$$

što je kod jednostavnog kamatnog računa:

$$C_o : 100 = K : p,$$

što daje

$$K = \frac{C_0 \cdot p}{100}.$$

2.1.1. Dekurzivni način obračuna kod jednostavnog kamatnog računa

Definicija dekurzivnog[6] obračuna kamata odnosi se obračun u kojem se iznosu C_0 kamate pribrajaju na kraju razdoblja, pri čemu se kamate obračunavaju od početne vrijedosti[7]. Ovo je način koji smo više navikli koristiti u poslovnoj praksi. U ovom načinu obračuna dužnik je posudio iznos C_0 uz kamatnu stopu p. U jednostavnom kamatnom računu s dekurzivnim obračunom kamate, glavnica ostaje konstantna tijekom čitavog obračunskog razdoblja, a kamata nakon prve godine izgleda ovako:

$$K_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100},$$

iz čega proizlazi da će se dug na kraju razdoblja podmiriti po formuli:

$$C_1 = C_0 + K_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Ako bismo računali kamate na kraju druge godine, one se opet računaju na početnu vrijednost C_0, pa je

$$K_2 = \frac{C_0 \cdot p}{100},$$

iz čega proizlazi

$$C_2 = C_1 + K_2 = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{C_0 \cdot p}{100} = C_0\left(1 + \frac{2p}{100}\right).$$

Zbog toga što su kamate jednake u svakom razdoblju ukamaćivanja proizlazi sljedeće:

$$C_n = C_0 + K = C_0 + C_0\frac{n \cdot p}{100},$$

[6] Od lat. riječi *decurrere* - pretrčati, prevaliti
[7] Relić, 2002., str. 62.

odnosno

$$C_n = C_o\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right),$$

a ukupne kamate su

$$K = \frac{C_0 \cdot n \cdot p}{100}.$$

.Primjer 1.

Ako osoba posudi 100000 kuna uz uvjet da će ih vratiti u roku pet godina uz jednostavan i dekurzivni obračun kamata i godišnju kamatnu stopu p = 5, koliko i kada će dužnik morati platiti da bi vratio dug uz dogovorene uvjete?

Rješenje:

Ako znamo

$C_0 = 100000$ kn,

$p = 5$,

$n = 5$,

prema formuli je:

$$C_n = C_o\left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right) = 100000\left(1 + \frac{5 \cdot 5}{100}\right) = 125000 \text{ kuna.}$$

Zajedno s iznosom duga $C_0 = 100000$ kn dužnik će vjerovniku dati iznos kamata prema formuli:

$$K = \frac{C_0 \cdot p \cdot n}{100} = \frac{100000 \cdot 5 \cdot 5}{100} = 25000 \text{ kuna.}$$

Dakle, možemo zaključiti da se kod jednostavnog kamatnog računa, kamate za svako razdoblje ukamaćivanja obračunavaju na istu glavnicu za razliku od složenog kamatnog računa gdje se obračunavaju na glavnicu uvećanu za prethodne, već pripisane kamate.

Primjer 2.

Koji će iznos za 7 godina uz fiksni godišnji kamatnjak 10,25% rezultirati jednostavnim kamatama u iznosu od 12 500 kuna? Obračun je jednostavni, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

Dakle, poznate su nam sljedeće vrijednosti:

$n = 7$,

$p = 10{,}25$,

$\underline{K = 12500 \text{ kn}}$

$C_0 = \ ?$

Glavnicu C_0 možemo dobiti izvođenjem iz formule $K = \frac{C_0 \cdot n \cdot p}{100}$, odakle je $C_0 = \frac{100 \cdot K}{p \cdot n}$.

Uvrštavanjem dobivamo $C_0 = \frac{100 \cdot 12500}{10{,}25 \cdot 7} = 17421{,}61$ kn.

Izvor: izrada autora

Primjer 3.

Uz koji godišnji kamatnjak je dužnik posudio 23 876 kn ako je kreditoru nakon 4 godine podmirio dug u iznosu od 30 000 kn? Obračun je jednostavni, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

Dakle, poznato nam je vrijeme ukamaćivanja i ukupne kamate jer predstavljaju razliku između posuđenog i vraćenog iznosa, tj.

$K = 30000 - 23876 = 6124 \text{ kn}$, zatim vrijeme kapitalizacije

$\underline{n = 4 \text{ godine}}$

$p = ?$

$p = \frac{100 \cdot K}{C_0 \cdot n} = \frac{100 \cdot 6124}{23876 \cdot 4}$

$p = 6{,}41\ \%$

Izvor: izrada autora

Ukoliko je, primjerice, vrijeme kapitalizacije potrebno izraziti u mjesecima ili danima, prilikom izračuna n godina ćemo zapisati u obliku $\frac{m}{12}$, odnosno u obliku $\frac{d}{360}$ ili pak $\frac{d}{365}$, ovisno o tome odlučimo li se koristiti francusku, njemačku ili tzv. englesku metodu računanja dana koja se najčešće i koristi u gospodarskoj praksi. No, o tome će više biti riječi u narednom poglavlju.

Primjer 4.

Ugovorom o kupoprodaji određeno je da kupac dobavljaču mora podmiriti fakturu u iznosu od 30000 kn sa 23.3.2020. Međutim, zbog problema sa solventnosti kupac je kasnio s podmirenjem obveze te ju je podmirio tek 17. kolovoza iste godine. Budući da je s kreditorom dogovorena zatezna kamata od 12,42%, kojim će iznosom dužnik podmiriti fakturu, ako znamo da se kamate obračunavaju krajem razdoblja po jednostavnom kamatnom računu?

Rješenje:

Sada ćemo, dakle, izračunati kamate po svakoj od tri prethodno navedene metode. Bitno je naglasiti da se prvi dan ne uračunava ni kod jedne metode te da po francuskoj i njemačkoj metodi godina ima 360 dana, no za razliku od francuske metode prema kojoj se dani računaju prema kalendaru, njemačka metoda podrazumijeva da svaki mjesec ima točno 30 dana. Engleska pak metoda koja je ujedno i najprimjenjenija u poslovnoj praksi uzima da godina ima 365 dana (pri čemu svaka prijestupna 366) dok se sami dani računaju prema kalendaru.

Tablica 1. Metode računanja dana

Mjesec	**Francuska metoda**	**Njemačka metoda**	**Engleska metoda**
ožujak	8	7	8
travanj	30	30	30
svibanj	31	30	31
lipanj	30	30	30
srpanj	31	30	31
kolovoz	17	17	17
UKUPNO DANA:	d = 147	d = 144	d = 147

Izvor: izrada autora

a) Prilikom izračuna jednostavnih kamata po francuskoj metodi, uzet ćemo da godina ima 360 dana, dok broj dana iznosi 147, te ćemo sukladno tome primijeniti sljedeću formulu:

$$I = \frac{C_0 \cdot p \cdot d}{36000} = \frac{30000 \cdot 12{,}42 \cdot 147}{36000} = 1521{,}45 \text{ kn.}$$

b) Za izračun kamata po njemačkoj metodi, smatrat ćemo da godina ima također 360 dana, a svaki mjesec 30 dana pa ćemo primijeniti istu formulu, no broj dana jest 144:

$$I = \frac{C_0 \cdot p \cdot d}{36000} = \frac{30000 \cdot 12{,}42 \cdot 144}{36000} = 1490{,}40 \text{ kn.}$$

c) Prilikom korištenja engleske metode čija se primjena podrazumijeva i onda kada ništa nije naznačeno, uobičajeno ćemo koristiti formulu koja u nazivniku ima 36500, budući da godina ima 365 dana. Međutim, s obzirom da je 2020. godina prijestupna, uzimamo da godina ima 366 dana, pa ćemo primijeniti sljedeću formulu:

$$I = \frac{C_0 \cdot p \cdot d}{36600} = \frac{30000 \cdot 12{,}42 \cdot 147}{36600} = 1496{,}51 \text{ kn.}$$

Izvor: izrada autora

Primjer 5.

Odredite iznos ukupnih jednostavnih kamata na glavnicu od 20467 kn za razdoblje od 7 godina ako je godišnji kamatnjak u prvih 4 godine p_1= *12%*, a u preostalim godinama je smanjen za 25 %. Obračun je godišnji, jednostavni i dekurzivni.

Rješenje:

$n_1 = 4$ god.,

$n_2 = 3$ god.,

$p_1 = 12$ %,

$p_2 = 12 - \left(12 \cdot \frac{25}{100}\right) = 9\%$

$I = ?$

$$I_{1,2,3,4} = \frac{C_0 \cdot p_1 \cdot n_1}{100} = \frac{20467 \cdot 12 \cdot 4}{100} = 9824{,}16 \text{ kn},$$

$$I_{5,6,7} = \frac{C_0 \cdot p_2 \cdot n_2}{100} = \frac{20467 \cdot 9 \cdot 3}{100} = 5526{,}09 \text{ kn}.$$

Ukupne jednostavne kamate, dakle, čini zbroj $I_{1,2,3,4}$ i $I_{5,6,7}$ što u konačnici daje rezultat: $I = 15350{,}25$ kn.

Izvor: izrada autora

Primjer 6.

Kroz razdoblje od 8 godina ukamaćivali smo glavnicu u iznosu od 30 000 kn najprije uz kamatnu stopu od 4%, a potom uz kamatnu stopu od 5%. Koliko vremena je bila ukamaćivana kamatnjakom od 4 %, a koliko s kamatnjakom od 5% ako je uz zadane uvjete glavnica donijela ukupne kamate u iznosu od 11 100 kuna? Obračun kamata je jednostavan, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

Znamo da je

$p_1 = 4$ %,

$p_2 = 5$ %,

$n = 8$ god.,

$\underline{K = 11\ 100 \text{ kn}}$

$n_1 = ?$

$n_2 = ?$

$n_2 = 8 - n_1$ budući da je $n = n_1 + n_2$.

Prema formuli $K = \frac{C_0 \cdot n \cdot p}{100}$ zaključujemo da ukupne kamate, ukoliko imamo varijabilni kamatnjak, čine sumu $C_0 \frac{n_1\ p_1}{100}$ te $C_0 \frac{n_2\ p_2}{100}$. Iz navedenog slijedi da je:

$$K = C_0 \frac{n_1\ p_1}{100} + C_0 \frac{n_2\ p_2}{100}$$

$$K = \frac{C_0}{100}(n_1 p_1 + n_2 p_2)$$

$$11\ 100 = \frac{30000}{100}(4n_1 + 5n_2)$$

$$11\ 100 = 300\,(4n_1 + 5n_2) / :300$$

$37 = 4n_1 + 5n_2$

Budući da je je $n_2 = 8 - n_1$, u prethodnu jednadžbu uvrstit ćemo ovaj izraz umjesto n_2. Dakle, slijedi:

$37 = \ 4n_1 + 5(8 - n_1)$

$37 = \ 4n_1 + 40 - 5n_1$

$5n_1 - 4n_1 = 40 - 37$

$n_1 = 3 \text{ godine},$

$n_2 = \ \ - n_1 = 5 \text{ godina}.$

Izvor: izrada autora

Primjer 7.

Ako je obračun kamata godišnji, jednostavan i dekurzivan i ako znamo da je dužnik nakon 5 mjeseci, vratio dug uključujući kamate u iznosu od 56 789 kn, koliko je novčanih jedinica posudio te koliko iznose kamate ako je godišnji kamatnjak fiksan i iznosi 24%?

Rješenje:

Budući da se radi o godišnjem obračunu, potrebno je mjesece pretvoriti u godine, dakle n će iznositi $\frac{5}{12}$ godine. Imamo poznate sljedeće vrijednosti:

$n = \ \frac{5}{12} = 5 \text{ mjeseci},$

$C_n = \ 56789 \text{ kn},$

$\underline{p = 24 \ \%}$

$C_0 = ?$

$I = ?$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{\frac{5}{12} \cdot 24}{100}\right)$$

$56789 \ = C_0 \cdot 1{,}1$

$C_0 = 56789 : 1{,}1 = 51626{,}36 \text{ kn}$

Sada kada znamo kolika je glavnica, lako ćemo izračunati i kamate oduzimanjem glavnice od vraćenog iznosa.

Izvor: izrada autora

2.1.2. Anticipativni obračun kamata kod jednostavnog kamatnog računa

Kod anticipativnog[8] obračuna kamata, kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja. Pri obračunu jednostavnih kamata glavnica ostaje nepromijenjena, tj. kamate se ne pribrajaju glavnici. Kamate se, dakle, obračunavaju unaprijed, i to od konačne vrijednosti nekog iznosa. Drugim riječima, dužnik će kamate platiti odmah, a iznos koji je posudio vratit će na kraju razdoblja kapitalizacije.[9]

Za razliku od dekurzivnog obračuna kamata ovdje se kamatnjak označava s *q* dok se kamate mogu bilježiti i oznakom $\overline{K}$ te su one jednake za svog razdoblja ukamaćivanja. Prema formuli za ovaj obračun, kamate se računaju na sljedeći način:

$$\overline{K}_1 = \overline{K}_2 = \ldots = \ldots \overline{K}_n = \frac{C_n \cdot q}{100},$$

a za *n* godina izgledaju ovako:

$$\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \ldots + \overline{K}_n = n \cdot \overline{K}_n.$$

Dakle, formula za ukupne kamate iznosi:

$$\overline{K} = \frac{C_n \cdot n \cdot q}{100},$$

izračun konačne vrijednosti za dužnika je

$$C_n = C_0 + \overline{K},$$

dok je glavnica

$$C_0 = C_n - \overline{K},$$

odnosno

$$C_0 = C_n - \frac{C_n \cdot n \cdot q}{100} = C_n\left(1 - \frac{n \cdot q}{100}\right).$$

[8] Od lat. anticipare - unaprijed uzeti

[9] Šegota, 2012., str. 38.

Iz dobivene jednakosti, konačna vrijednost glavnice anticipativnim obračunom jednostavnog kamatnog računa je:

$$C_n = C_0 \frac{100}{100 - n \cdot q} .$$

Primjer 8.

Ako osoba posudi 100 000 kuna uz uvjet da će ih vratiti u roku pet godina uz jednostavan i anticipativan godišnji obračun kamata i godišnju kamatnu stopu q = 5, koliko i kada će dužnik morati platiti da bi vratio dug uz dogovorene uvjete?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100\ 000$ kn,

$n = 5$,

$q = 5$

Prema formuli:

$$C_5 = C_0 \frac{100}{100 - n \cdot q} = 100000 \cdot \frac{100}{100 - 5 \cdot 5} = 133333{,}33 \text{ kn.}$$

Konačni iznos na kraju razdoblja je 133333,33 kuna, a ukupne kamate izračunavamo prema formuli:

$$\overline{K} = C_n - C_0 = 133333{,}33 - 100000 = 33333{,}33 \text{ kn.}$$

Ukupne kamate u ovakvom obračunu razlikuju se od dekurzivnog načina gdje su za isto razdoblje bile 25 000 kuna (Primjer 1). Daljnjim računanjem s promijenjenim vrijednostima može se uočiti kolike su razlike s višim godinama otplate posuđenog novca.

Tablica 2. Jednostavni obračun kamata

	$C_0 = 100000$				
n		**Dekurzivni**	**obračun**	**Anticipativni**	**obračun**
		p = 5	p = 10	q = 5	q = 10
n = 5	K	12500	50000	33333,33	100000
	C_n	125000	150000	133333,33	200000
n = 7	K	35000	70000	53846,15	233333,33
	C_n	135000	170000	153846,15	333333,33
n = 9	K	45000	90000	81818,18	900000
	C_n	145000	190000	181818,18	1000000

Izvor: izrada autora

U gornjoj tablici vidimo kako za isti iznos početne glavnice, promjena kamatnjaka i razdoblja ukamaćivanja utječu na iznos ukupnih kamata i konačnu vrijednost. Iznos kamata koje dužnik mora platiti, uz jednake uvjete financiranja, uvijek je manji kod dekurzivnog obračuna kamata, što dakle, posljedično dovodi do zaključka da je dekurzivni obračun kamata stoga povoljniji za dužnika od anticipativnog obračuna kamata. Sasvim je evidentno da razlika proizlazi iz činjenice da se primjenom anticipativnog ukamaćivanja kamate uvijek obračunavaju na početku razdoblja od glavnice s kraja razdoblja.

2.2. Složeni kamatni račun

Složeni kamatni račun podrazumijeva postupak izračunavanja kamata na jednu ili više glavnica kojima su u ranijim razdobljima već pripisane kamate. Tako financijska matematika operira s promjenjivom vrijednosti novca u vremenu.[10] Primjerice, kamate obračunate za prvo jedinično razdoblje pridodaju se glavnici, pa se u drugom obračunskom razdoblju kamate obračunavaju tako da se kao osnovica za obračun uzima glavnica uvećana za kamate iz prethodnog razdoblja. Zbog toga se ovaj račun može nazivati i kamatno-kamatnim računom[11], a u nastavku rada bit će objašnjeni i anticipativni i dekurzivni način obračuna kamata. Ovdje će se koristiti oznaka r za

[10] Crnković i dr., 1984., str. 189.
[11] Štambuk, 2006., str. 144.

dekurzivni kamatni faktor koji predstavlja vrijednost jedne novčane jedinice zajedno s kamatama na kraju godine. Izraz *r* nazivamo i faktorom akumulacije.[12]

2.2.1. Dekurzivno ukamaćivanje kod složenog kamatnog računa

Konačna vrijednost nekog iznosa u složenom kamatnom računu izvodi se pomoću matematičke indukcije. Ako uzmemo vrijednosti C_0 za glavnicu, *p* za kamatnu stopu, *n* za razdoblje ukamaćivanja i C_n kao vrijednost glavnice na kraju razdoblja, možemo izvesti formulu ili način na koji izračunavamo dekurzivno ukamaćivanje kod složenog kamatnog računa (u složenom kamatnom računu kamate označavamo s
I). Tako za kamatu na kraju prvog obračunskog razdoblja dobijemo:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100},$$

pa je vrijednost kapitala na kraju prve godine

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0 \cdot p}{100} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na kraju druge godine kamate iznose

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100}.$$

Prilikom izračuna glavnice potrebno je prethodno izračunati dekurzivni kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p}{100}\ .$$

Vrijednost glavnice C_0 na kraju druge godine iznosi

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + \frac{C_1 \cdot p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 r^2,$$

kamate *n*-tog razdoblja su

$$I_n = \frac{C_{n-1} \cdot p}{100},$$

pa tako krajnju vrijednost glavnice *n*-te godine dobijemo zbrajanjem vrijednosti glavnice iz prethodne godine, *n-1*, i kamata *n*-te godine:

$$C_n = C_{n-1} + I_n\,,$$

te se s obzirom na prethodnu formulu za kamate *n*-tog razdoblja može napisati kao

$$C_n = C_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

[12] Perić, 2016., str. 281.

Budući da je p konstantna veličina, a samim time i r, krajnje vrijednosti kapitala C_1, $C_2,\ldots,C_n$ čine geometrijski niz s kvocijentom r, *tj.*

$$C_0r,\ C_0r^2,\ldots,\ C_0r^n.$$

Opći, n-ti član tog niza je:

$$C_n = C_0r^n,$$

odnosno

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}.$$

Na ovaj način smo dobili formulu za izračun krajnje vrijednosti za n-to razdoblje uz kamatnu stopu p za složeni dekurzivni kamatni račun, koja glasi

$$C_n = C_0r^n.$$ [13]

Možemo zaključiti da su u kapitalu C_1 već sadržane i kamate obračunate na iznos C_0, pa se stoga i kaže da se složenim ukamaćivanjem zapravo obračunavaju kamate na kamatu.

Primjer 9.

Ako osoba posudi 100 000 kuna uz uvjet da će ih vratiti u roku pet godina uz složen i dekurzivni obračun kamata i godišnju kamatnu stopu p = 5, koliko i kada će dužnik morati platiti da bi vratio dug uz dogovorene uvjete?

Rješenje:

Dakle, znamo:

$C_0 = 100000$ kn,

$p = 5\%$,

$n = 5$ god.

Prema formuli, dekurzivni kamatni faktor je

$$r = 1+\frac{p}{100} = 1+\frac{5}{100} = 1{,}05,$$

a kada ga uvrstimo u formulu, dobijemo

$$C_5 = 100000\cdot 1{,}05^5 = 127628{,}16 \text{ kn}.$$

[13] Štambuk, 2006., str. 145.-146.

Iznos kamata dobijemo računanjem pomoću

$$I = C_5 - C_0 = 27628,16 \text{ kn}.$$

Bitno je napomenuti da je pri jednakim uvjetima kod jednostavnog dekurzivnog računa iznos kamata bio manji te je stoga to isplativiji način za dužnika.

U izračunavanju nekad je potrebno odrediti početni iznos C_0 koji je uložen uz kamatnu stopu p te je kroz određeno razdoblje n narastao na iznos C_n. Određivanje početne vrijednosti C_0 na osnovu vrijednosti neke buduće uplate C_n zove se diskontiranje.[14] To je zapravo postupak izračunavanja sadašnje vrijednosti glavnice. Vrijednost C_0 u ovakvom ukamaćivanju prema formuli je

$$C_o = \frac{C_n}{r^n}.$$

Također potrebno je uvesti i faktor

$$\frac{1}{r^n}$$

koji se zove diskontni kamatni faktor.

Na sljedećem primjeru bit će pokazano kako se izvodi račun za određivanje broja razdoblja na koje je zadani iznos uložen.

Primjer 10.

Ako je uložen iznos 100 000 kn, a kamatna stopa je p = 5,2 % te je dužnik na kraju razdoblja vratio 150 012 kuna uz godišnji, dekurzivan i složeni obračun, na koliko je godina uložen iznos?

Rješenje:

Znamo

$C_0 = 100000$ kn,

$p = 5,2$ %,

$C_n = 150012$ kn

[14] Ibid, str.147.

Stoga dekurzivni kamatni faktor r iznosi $1{,}052$. Iz formule za složeni dekurzivni kamatni račun, koja glasi

$$C_n = C_0 r^n,$$

dobijemo

$$r^n = \frac{C_n}{C_0}\,.$$

Kod logaritmiranja možemo uzeti u obzir sljedeće pravilo: $log\frac{x}{y} = log\,x - log\,y\cdot$

Pomoću logaritamske funkcije izvodi se sljedeće:

$$log\,r^n = n\,log\,r = log\frac{C_n}{C_0}$$

te tako izvodimo formulu za *n*:

$$n = \left\lceil\frac{\log\frac{C_n}{C_0}}{\log r}\right\rceil = \left\lceil\frac{\log\frac{150012}{100000}}{\log 1{,}052}\right\rceil = 8\text{ godina.}$$ [15]

Primjer 11.

Koji novčani iznos ćemo morati vratiti vjerovniku ako smo posudili 555 kn na određeno razdoblje uz kamatnjak 7,7% ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan?

Rješenje:

Budući da znamo da se kod dekurzivnog ukamaćivanja obračun kamata vrši na početni iznos, konačni iznos mogli bismo izračunati na sljedeći način:

$C_n = 555 + 555\cdot\frac{7{,}7}{100} = 597{,}74\text{ kn}$, odnosno ukoliko bismo izračunali dekurzivni kamatni faktor prema formuli $r = 1 + \frac{p}{100}$, on bi iznosio $\mathrm{r} = 1 + \frac{7{,}7}{100} = 1{,}077$ koji, kada ga prema formuli $C_1 = C_0\cdot r$ pomnožimo sa 555 kn, daje iznos od $597{,}74\text{ kn}$.

Izvor: izrada autora

Primjer 12.

---

[15] $f(x) = \lceil x\rceil$ - funkcija "najmanje cijelo" svakom realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj jednak ili veći od x

Ako bismo željeli oročiti 120 000 kn uz godišnji kamatnjak od 5,2%, na koliko godina bismo trebali oročiti taj iznos da bismo zaradili 50 000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

$p = 5{,}2$ %,

$\underline{C_n = 120000 + 50000 = 170000 \text{ kn}}$

$n = ?$

Budući da se C_n računa prema formuli $C_n = C_0 \cdot r^n$, slijedi da je $170000 = C_0 \cdot 1{,}052^n$, odnosno:

$C_0 \cdot r^n = \frac{170000}{120000} \cdot C_0 \;/ : C_0$

$r^n = 1{,}416666667 \Rightarrow r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5{,}2}{100} = 1{,}052$

$1{,}052^n = 1{,}416666667 / \cdot \log$

$\log 1{,}052^n = \log 1{,}416666667$

$n \log 1{,}052 = \log 1{,}416666667$

$n = \frac{\log 1{,}416666667}{\log 1{,}052} \approx 6{,}87$ godina odnosno u konačnici $n = 7$ godina.

Izvor: izrada autora

Ako bismo pak željeli iz konačnog iznosa saznati početni, upotrijebiti ćemo formulu

$$C_0 = \frac{C_n}{r_n} = C_n \left(\frac{1}{r}\right)^n.$$

Primjer 13.

Koji iznos bismo trebali oročiti u banci da bismo nakon tri godine mogli podići 5000 kn i nakon sedam godina još 11111 kn uz fiksni godišnji kamatnjak 9%. Obračun kamata je dekurzivan, godišnji i složen.

Rješenje:

Dakle, znamo da kamatnjak iznosi *9%* za cjelokupno razdoblje pa prema tome *r* iznosi,

$r = 1 + \frac{p}{100} = \frac{9}{100} = 1{,}09$, a početni iznos ćemo izračunati na sljedeći način:

$C_O = \frac{C_n}{r^n} = \frac{5000}{1{,}09^3} + \frac{11111}{1{,}09^7} = 9939{,}01\text{ kn}$.

Sada ćemo dobiveni iznos pomnožiti sa $1{,}09^3$ i dobiti 12871,31 kn. Dakle, toliko smo dobili nakon tri godine oročenja, nakon čega smo podigli 5000 kn i ostao nam je iznos od 7871,31 kune. Sada ćemo taj dobiveni iznos koji nam je ostao oročen pomnožiti sa $1{,}09^4$ i dobiti 11111 kn.

Izvor: izrada autora

Primjer 14.

Koliko godina treba da oročena svota od 15555 kn uz fiksni godišnji kamatnjak od 11% naraste na barem 75555 kuna? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

Rješenje:

Imamo poznate sljedeće veličine:

$C_0 = 15\,555\text{ kn}$,

$C_n = 75\,555\text{ kn}$,

$p = 11\%$ iz čega dolazimo do → $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{11}{100} = 1{,}11$

$n = ?$

$$\mathrm{n} = \left\lceil \frac{\log C_n - \log C_0}{\log r} \right\rceil$$

$$\mathrm{n} = \left\lceil \frac{\log 75555 - \log 15555}{\log 1{,}11} \right\rceil \approx 15{,}14$$

$n = 16$ godina

Dakle, vidimo da je uz zadani fiksni godišnji kamatnjak potrebno 16 godina da uložena svota naraste na barem 75 555 kuna.

Izvor: izrada autora

Primjer 15.

Ukoliko u prethodnom zadatku imamo varijabilni kamatnjak, odnosno, ako znamo da se u prve tri godine ukamaćivalo kamatnjakom 9%, a u narednih pet kamatnjakom 7%, koliko se vremena ukamaćivalo kamatnjakom 6%?

Rješenje:

Dakle, poznati su nam sljedeće vrijednosti:

$C_0 = 15\ 555$ kn,

$C_n = 75\ 555$ kn,

$p_1 = 9\%$, $n_1 = 3$,

$p_2 = 7\%$, $n_2 = 5$,

$p_3 = 6\%$

$n_3 = ?$

$n = n_1 + n_2 + n_3$

Znamo da je konačna vrijednost

$C_n = C_0 r_1^{n_1} r_2^{n_2} r_3^{n_3}$, pa moramo izračunati r_1, r_2 i r_3:

$r_1 = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{9}{100} = 1{,}09$

$r_2 = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1{,}07$

$r_3 = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$

$75555 = 15555 \cdot 1{,}09^3 1{,}07^5 1{,}06^{n_3}$

$75555 = 28253{,}25 \cdot 1{,}06^{n_3} / :^{28253{,}25}$

$1{,}06^{n_3} = \frac{75555}{28253{,}25} / \cdot^{\log}$

$\log 1{,}06^{n_3} = \log \frac{75555}{28253{,}25}$

Sada ćemo iskoristiti pravilo $\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$ i pravilo $\log x^y = y \log x$ i zapisati ovako:

$n_3 \log 1{,}06 = \log 75555 - \log 28253{,}25 / : \log 1{,}06$

$$n_3 = \left\lceil \frac{\log 75555 - \log 28253{,}25}{\log 1{,}06} \right\rceil$$

$n_3 \approx 16{,}880$, pa je $n_3 = 17$ godina.

Budući da smo izračunali nepoznanicu n_3, sada je možemo uvrstiti pa dobivamo da je ukupni broj godina n kojeg čini suma n_1, n_2 i n_3:

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 5 + 17 = 25$ godina, što nas vodi do zaključka da je ukupno bilo potrebno 25 godina oročenja zadane svote da početni iznos naraste na 75 555 kuna.

Izvor: izrada autora

Primjer 16.

Uz godišnji kamatnjak u prvih pet godina od 7%, a zatim kamatnjak 8% za naredne dvije godine te kamatnjak od 9% za posljednje 2 godine, koliki je iznos ukupnih složenih dekurzivnih kamata, ako znamo da je početni iznos 15 000 kuna?

Rješenje:

Dakle, početni iznos je $15\,000$ kuna, dok nam je kamatnjak za prvih pet godina $p_1 = 7\%$.

Slijedom toga dolazimo do zaključka da je

$C_5 = C_0 \cdot r_1^5 = C_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^5 = 15000 \cdot 1{,}07^5 = 21038{,}28$ kuna, što je ujedno i početni iznos za dvije godine ukamaćivanja po stopi od 8%. Dakle,

$C_7 = C_5 \cdot r_2^2 = C_5\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 = 21038{,}28 \cdot 1{,}08^2 = 24539{,}05$ kuna,

$C_9 = C_7 \cdot r_3^2 = C_7\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 = 24539{,}05 \cdot 1{,}09^2 = 29154{,}85$ kuna.

Vidimo da su u ovom slučaju ukupne kamate skoro kao i glavnica:

$I = C_9 - C_0 = 29154{,}85 - 15000{,}00 = 14154{,}85$ kuna.

Izvor: izrada autora

Primjer 17.

Ako znamo da C_n iznosi 25 000 kn, a početni iznos C_0 = 10000 kuna, razdoblje ukamaćivanja jest 7 godina, koliki je dekurzivni kamatni faktor? Obračun je godišnji, složen i dekurzivan.

Rješenje:

$C_n = 25000$ kn,

$C_0 = 10000$ kn,

$n = 7$ godina

$r = ?$

$$r^7 = \frac{C_n}{C_0} = \frac{25000}{10000} = 2{,}5$$

odnosno prema formuli $r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[7]{\frac{25000}{10000}}$ dobivamo da r iznosi 1,14.

Kada bismo, primjerice, znali r i htjeli izračunati broj jediničnih razdoblja ukamaćivanja upotrijebili bismo formulu $n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log r}$, te na taj način dobili rezultat 7 godina. Ukoliko bismo pak željeli izračunati kamatnjak iz prethodno navedenih vrijednosti, koristili bi formulu $p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right)$, te bismo tako dobili sljedeće:

$$p = 100\left(\sqrt[7]{\frac{25000}{10000}} - 1\right) = 14\%.$$

Izvor: izrada autora

2.2.2. Anticipativno ukamaćivanje kod složenog kamatnog računa

U ovom načinu složenog ukamaćivanja glavnica je promjenjiva u svakom razdoblja ukamaćivanja za vrijeme trajanja kapitalizacije[16]. Tako konačnu ili buduću vrijednost uz anticipativan obračun *n* godina računamo na sljedeći način:

$$C_n = C_0\rho^n$$

u kojem se izraz

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

naziva anticipativni kamatni faktor.

[16] Relić, 2002., str. 178.

Početnu vrijednost glavnice računamo pomoću formule:

$$C_0 = \frac{C_n}{\rho^n}.$$

Primjer 18.

Koji novčani iznos ćemo morati vratiti vjerovniku ako smo posudili 555 kn na određeno razdoblje uz kamatnjak 7,7% uz godišnji, složen i anticipativan obračun kamata? U prethodnom poglavlju (Primjer 11) isti smo zadatak računali uz dekurzivni obračun kamata.

Budući da se kod anticipativnog obračuna, obračun kamata vrši na konačni iznos koji nam nije poznat, uvrstit ćemo ga kao nepoznanicu:

$x = 555 + \frac{7,7}{100}x,$ pa ćemo sada x izlučiti na jednoj strani, tj.

$x - x\frac{7,7}{100} = 555$

$0,923\,x = 555$

$x = 555 : 0,923 = 601,30 \text{ kn}.$

Izvor: izrada autora

Primjer 19.

Kolika je konačna vrijednost glavnice u iznosu od 100000 kuna na kraju pete godine ako je godišnji kamatnjak 5, uz godišnji, anticipativan i složeni obračun?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000 \text{ kn},$

$q = 5,$

$n = 5,$

pa odmah izračunamo anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \frac{100}{100 - q} = 1{,}05263157.$$

Koristeći formulu $C_n = C_0 \cdot \rho^n$, izračunamo

$$C_n = 100000 \cdot 1{,}05263157^{\,5} = 129235{,}54 \text{ kuna}.$$

Stoga je konačna vrijednost glavnice $129235{,}54$ kuna, a kamate koje izračunamo prema jednostavnoj formuli iznose

$$\bar{I} = C_5 - C_0 = 29235{,}54 \text{ kn}.$$

Jednako kao i kod dekurzivnog složenog ukamaćivanja, bit će prikazan način izračunavanja za određivanje broja razdoblja na koji je neki iznos posuđen.

Primjer 20.

Ako je uložen iznos 100000 kuna, a kamatnjak je p = 4,94% te je dužnik na kraju razdoblja vratio 150000 kuna uz godišnji, dekurzivan i složeni obračun, na koliko je godina uložen iznos?

Rješenje:

Poznate su nam sljedeće vrijednosti:

$C_0 = 100000$ kn,

$q = 4{,}94\%$,

$C_n = 150000$ kn.

Anticipativni kamatni faktor $\rho = \frac{100}{100 - q} = 1{,}051967179$. Prema formuli

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n,$$

izvedemo

$$\rho^n = \frac{C_n}{C_0}$$

te pomoću logaritamske funkcije izračunamo

$$\log \rho^n = n \log \rho = \log \frac{C_n}{C_0}$$

i kad uvrstimo brojeve dobijemo rezultat za koliki broj godina će se ostvariti zadano ukamaćivanje

$$n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log \rho} = \frac{\log \frac{150000}{100000}}{\log 1{,}051967179} = 8 \text{ godina.}$$

Tablica 3. Složeni obračun kamata

$C_0 = 100000$					
n		**Dekurzivni**	**obračun**	**Anticipativni**	**obračun**
		p = 5	p = 10	q = 5	q = 10
n = 5	I	27628,16	61051	29235,54	69350,88
	C_n	127628,16	161051	129235,54	169350,88
n = 7	I	40710,04	94871,71	43197,28	109075,16
	C_n	140710,04	194871,71	143197,28	209075,16
n = 9	I	55132,82	135794,77	58667,34	158117,48
	C_n	155132,82	235794,77	158667,34	258117,48

Izvor: izrada autora

Iz gornje tablice vidimo kako je za početni iznos glavnice, uz jednake dekurzivne i anticipativne kamatne faktore, odnosno u potpunosti jednake uvjete kreditiranja, anticipativni obračun složenog kamatnog računa uvijek nepovoljniji za dužnika.

3. KAMATNE STOPE

3.1. Jednostavno ispodgodišnje i iznadgodišnje ukamaćivanje

Vrlo često je zadana dekuzivna godišnja kamatna stopa, a vrijednost kapitala treba izračunati za mjesece ili dane, polugodišta ili kvartale, odnosno za vrijeme kraće od jedne godine.

Prema veličinama za jednostavno ispodgodišnje ukamaćivanje, p je dekurzivna godišnja kamatna stopa, p_m dekurzivna kamatna stopa za m-ti dio godine, tj. za obračunsko razdoblje duljine $1/m$ gdje je m broj jednakih podintervala na koje dijelimo godinu, pa je tako $m = 2$ ako promatramo polugodišta, $m = 4$ ako promatramo kvartale,

$\mathrm{m} = 12$ ako promatramo mjesece i $m = 365$ ili 366 za obračun po danima, a oznakom k označavamo broj obračunskih razdoblja.[17]

Ispodgodišnja kamatna stopa p_m treba biti tako definirana da iznos konačnog kapitala na kraju godine uz primjenu jednostavnog ukamaćivanja bude jednak, bez obzira jesmo li jedanput primijenili godišnju kamatnu stopu p ili smo m puta sukcesivno primijenili ispodgodišnju kamatnu stopu p_m.

Tako dobivamo:

$$C_1 = C_0 + C_0 \frac{p}{100},$$

a za vrijednosti kapitala na kraju $\frac{k}{m}$ - tog dijela godine $(za\ k = 1,2, \dots, n)$ dobivamo

$$C_{k/m} = C_0 + k \cdot C_0 \frac{\frac{p}{m}}{100},$$

odnosno konačni kapital C_1 na kraju prvog podintervala dobiven primjenom ispodgodišnje kamatne stope $p_m = \frac{p}{m}$ iznosi[18]:

$$C_{1/m} = C_0 + C_0 \frac{\frac{p}{m}}{100},$$

na kraju drugog podintervala:

$$C_{2/m} = C_{1/m} + C_0 \frac{\frac{p}{m}}{100} = C_0 + 2C_0 \frac{\frac{p}{m}}{100}.$$

Dakle, ukoliko k puta primijenimo jednostavnu ispodgodišnju kamatnu stopu, tada će vrijednost kapitala $C_{k/m}$ na kraju $\frac{k}{m}$ - tog dijela godine biti jednaka[19]:

$$C_{k/m} = C_0 \left(1 + k \cdot \frac{p_m}{100}\right).$$

Primjer 21.

Ako glavnica iznosi 11111 kn, a godišnja kamatna stopa p iznosi 14%, koliko iznosi vrijednost kapitala nakon 7 mjeseci, uz primjenu jednostavnog ispodgodišnjeg ukamaćivanja i pretpostavku da je obračunsko razdoblje 1 mjesec?

---

[17] Klobučar, 2018., str. 11.
[18] Crnjac i dr., 1994., str. 312.
[19] Klobučar, 2018., str. 12.

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 11111$ kn,

$p = 14\%$,

$p_m = \frac{14}{12}$,

$k = 7$

$C_{k/m} = ?$

$C_{k/m} = C_0\left(1 + k \cdot \frac{p_m}{100}\right)$

$C_{7/12} = 11111 \cdot \left(1 + 7 \cdot \frac{\frac{14}{12}}{100}\right) = 12018{,}40$ kn.

Vidimo da uz zadane uvjete, primjenom jednostavnog ispodgodišnjeg ukamaćivanja, vrijednost kapitala iznosi 12018,40 kn.
Izvor: izrada autora

Ako je obračunsko razdoblje mjesec dana, tada je $m = 12$ i $p_m = \frac{p}{12}$, a kamate računamo na sljedeći način[20]:

$$I = C_o \frac{k \cdot p}{12 \cdot 100}.$$

Oznaka k, dakle, predstavlja broj mjeseci na koji je posuđen kapital C_0. Ako je pak obračunsko razdoblje dan, tada m iznosi 365 ili 366 dana, te je stoga $p_m = \frac{p}{365}$ ili $p_m = \frac{p}{366}$, a kamate računamo pomoću formule:

$$I = C_o \frac{k \cdot p}{365 \cdot 100} \ ili\ I = C_0 \frac{k \cdot p}{366 \cdot 100}.$$[21]

U poslovnoj praksi se vrlo često, osim s godišnjim obračunom kamatama, susrećemo i s polugodišnjim, kvartalnim i mjesečnim obračunom. Pri izračunu kamata s danima kao obračunskom jedinicom vremena koristimo tri metode. Zbroj dana obračunat po francuskoj metodi označit ćemo oznakom d_f, po njemačkoj d_{nj}, a po engleskoj metodi d_e.

[20] Štambuk, 2006., str. 141.
[21] loc. cit., str. 141.

1. Francuska metoda: godina ima 360 dana, a broj dana u svakom pojedinom mjesecu se računa prema kalendaru. Jednostavne kamate računaju se pomoću formule
$$I = \frac{C_o \cdot p \cdot d_f}{36000}.$$
2. Njemačka metoda: godina ima 360 dana, a broj dana u svakom mjesecu je 30. Jednostavne kamate računaju se pomoću formule
$$I = \frac{C_o \cdot p \cdot d_{nj}}{36000}.$$
3. Engleska metoda: godina ima $365 \text{ ili } 366 \text{ dana}$, a broj dana u svakom pojedinom mjesecu se računa prema kalendaru. Jednostavne kamate računaju se pomoću formule
$$I = \frac{C_o \cdot p \cdot d_e}{36500}.$$

Treba napomenuti da se prilikom obračuna kamata, kod sve tri metode, prvi datum ne uzima u obzir za razliku od zadnjeg.[22]

Primjer 22.

Odobren je kratkoročni kredit za u iznosu od 100 000 kuna uz godišnju kamatnu stopu 5% za vrijeme od 15.1. do 30.6. iste godine uz dekurzivni obračun kamata. Treba odrediti iznos jednostavnih kamata prema svakoj od poznatih metoda:

a) francuska,

b) njemačka,

c) engleska.

Rješenje:

Znamo:

$C_o = 100000 \text{ kn}$,

$p = 6$,

$d = \text{od } 15.1. \text{ do } 30.6.$

[22] Šegota, 2012., str. 22.

Uobičajeno je u prvom koraku odrediti točan broj dana za metodu koja se koristi. Znamo da se prvi dan, odnosno, u ovom primjeru 15. siječnja ne uzima u obračun za razliku od zadnjeg dana kojeg moramo obračunati.

U nastavku će biti obrađeni primjeri za sve tri metode:

a) francuska

$$I = \frac{C \cdot p \cdot d_f}{36000} = \frac{100000 \cdot 6 \cdot 166}{36000} = 2766{,}67 \text{ kn},$$

b) njemačka

$$I = \frac{C \cdot p \cdot d_f}{36000} = \frac{100000 \cdot 6 \cdot 165}{36000} = 2750{,}00 \text{ kn},$$

c) engleska

$$I = \frac{C \cdot p \cdot d_e}{36500} = \frac{100000 \cdot 6 \cdot 166}{36500} = 2728{,}77 \text{ kn}.$$

Mora se također napomenuti da ako kamatna stopa iznosi manje od 10% na godišnjoj razini, ona se smatra malom, pa su tako i razlike između metoda male. Međutim, ukoliko je kamatna stopa veća od tog broja ili općenito velika uslijed utjecaja nekog ekonomskog faktora (npr. inflacije), onda metode igraju veliku ulogu u iznosu ukupnih kamata.[23] U Hrvatskoj je prije osamostaljenja bila u primjeni francuska metoda, a danas je to engleska.

U prethodnom primjeru prezentiran je zadatak sa jednostavnim ispodgodišnjim ukamaćivanjem. Stoga će sada biti objašnjen primjer sa jednostavnim iznadgodišnjim ukamaćivanjem.

Primjer 23.

Marko je oročio iznos od 1000 kn uz kamatnu stopu 12% na period od 4 godine. Kolika će biti konačna vrijednost glavnice na kraju druge godine, a kolika po isteku oročenja? Obračun je jednostavan, dekurzivni i dvogodišnji. Izvor: izrada autora

[23] Šego i Lukač, 2011., str.107.

Rješenje:

Poznate su nam sljedeće vrijednosti:

$C_o = 1000$ kn,

$p = 12\%$,

$\underline{n = 4 \text{ god.}}$

$C_2 = ?$

$C_4 = ?$

S obzirom da je obračun dvogodišnji, glavnica će se ukamaćivati svega dva puta u četiri godine, pa slijedi da je $m = \frac{1}{2}$, pa dobivamo da $p_m = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24.$

Sad ćemo dobivene veličine uvrstiti u formulu:

$$C_{k/m} = C_0 + C_0 \cdot k \cdot \frac{\frac{p}{m}}{100},$$

da bismo izračunali konačnu vrijednost na kraju druge godine:

$k = 1 \Longrightarrow C_{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = C_2 = 1000 + 1000 \cdot 1 \cdot \frac{24}{100} = 1240$ kn, a potom i na kraju četvrte godine:

$k = 2 \Longrightarrow C_{\frac{2}{\frac{1}{2}}} = C_4 = 1000 + 1000 \cdot 2 \cdot \frac{24}{100} = 1480$ kn.

3.2. Složeno ispodgodišnje ukamaćivanje

Konačni kapital C_1 na kraju godine dobiven primjenom nominalnog godišnjeg kamatnjaka iznosi:

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

dok uz primjenu ispodgodišnje relativne kamatne stope $p_m = \frac{p}{m}$ vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju prvog podintervala je:

$$C_{1/m} = C_0 + C_0 \frac{p_m}{100} = C_0 r_m,$$

gdje ispodgodišnji kamatni faktor označavamo oznakom $r_m = 1 + \frac{p_m}{100}$.

Tako na kraju drugog podintervala imamo:

$$C_{2/m} = C_{1/m} + C_{1/m}\frac{p_m}{100} = C_0 r_m^2,$$

odnosno nakon k podintervala duljine $\frac{1}{m}$ vrijednost kapitala iznosi: $C_0 r_m^k$.

Na kraju m-tog podintervala, odnosno na kraju godine imamo:

$$C_{m/m} = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^m.$$

Ukamaćivanjem m puta uz relativni kamatnjak dobivamo konačan iznos kamata koji se razlikuje od iznosa dobivenog jednim ukamaćivanjem uz nominalni kamatnjak te stoga umjesto relativnog primjenjujemo konformni kamatnjak koji tu razliku u iznosima poništava.

Veličinu složenog ispodgodišnjeg konformnog kamatnjaka odredit ćemo formulom.[24]

$$p'_m = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right).$$

Primjer 24.

Dužnik je 23.3. posudio iznos od 17777 kn uz varijabilnu mjesečnu kamatnu stopu i uz obračun složenih dekurzivnih kamata. Posuđeni iznos treba vratiti 14.06. Mjesečna kamatna stopa u ožujku iznosila je 1,5%, u travnju 2%, u svibnju 2,5%, a u lipnju 3%. Koliko je iznosio dug 14.6.?

Rješenje:

Prvo ćemo odrediti dnevne kamate za 8 dana u ožujku, 30 dana u travnju, 31 dan u svibnju i 14 dana u lipnju, a indekse u oznakama za izračun dnevnog kamatnjaka i veličine duga za određeni mjesec označavat ćemo prema rednom broju tog mjeseca.

Prema općoj formuli:

$$p'_m = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right),$$

dobivamo da dnevni kamatnjak za ožujak iznosi:

---

[24] Crnjac i dr., 1994., str. 320.'

$$p'_3 = 100 \cdot \left(\sqrt[31]{1 + \frac{1,5}{100}} - 1\right) = 0,04803931742\ \%,$$

za travanj:

$$p'_4 = 100 \cdot \left(\sqrt[30]{1 + \frac{2}{100}} - 1\right) = 0,06603054823\ \%,$$

za svibanj:

$$p'_5 = 100 \cdot \left(\sqrt[31]{1 + \frac{2,5}{100}} - 1\right) = 0,0796853209\ \%$$

i za lipanj:

$$\mathrm{p}'_6 = 100 \cdot \left(\sqrt[30]{1 + \frac{3}{100}} - 1\right) = 0,09857789691\ \%.$$

Stoga, 31.3. dug prema formuli:

$$C'_3 = C_0\left(1 + \frac{p'_3}{100}\right)^8$$

iznosi:

$$C'_3 = 17777 \cdot \left(1 + \frac{0,04803931742}{100}\right)^8 = 17845,43 \text{ kn},$$

30.04. veličina duga iznosi:

$$C'_4 = C'_3\left(1 + \frac{p'_4}{100}\right)^{30} \Rightarrow C'_4 = 17845,43 \cdot \left(1 + \frac{0,06603054823}{100}\right)^{30} = 18202,34 \text{ kn},$$

31.05. dug je narastao na:

$$C'_5 = C'_4\left(1 + \frac{p'_5}{100}\right)^{31} \Rightarrow C'_5 = 18202,34 \cdot \left(1 + \frac{0,0796853209}{100}\right)^{31} = 18657,40 \text{ kn},$$

a na datum 14.06. stanje duga jest:

$$C'_6 = C'_5\left(1 + \frac{p'_6}{100}\right)^{14} \Rightarrow C'_6 = 18657,40 \cdot \left(1 + \frac{0,09857789691}{100}\right)^{14} = 18916,55 \text{ kn}.$$

Izvor: izrada autora

3.3. Vrste kamatnih stopa

Prvenstveno na visinu kamate utječe nekoliko faktora. U te faktore se ubraja iznos kredita ili depozita koji dužnik uzima iz banke ili polaže u nju, period za vraćanje ili polaganje iznosa, visina ugovorene stope i metoda obračuna kreditne ustanove kod koje se iznos posuđuje. Obično se izračunava primjenom kamatne stope na dobiveni ili uloženi iznos sredstava, pri čemu se primjenjuju različite metode obračuna kamata.

Na visinu kamatne stope utječu izbor vrste kredita ili depozita, period odobravanja ili polaganja sredstava, konkurentsko pozicioniranje, stopa inflacije, kreditni rejting zemlje i drugi ekonomski faktori.[25]

Kamatne stope pokazuju prinos svote od 100 novčanih jedinica u jednom obračunskom razdoblju, a mogu biti promjenjive i fiksne.[26] Od iznimne je važnosti obratiti pozornost na to je li kamatna stopa nominalna ili efektivna te interkalarna i zatezna, posebice kod ugovaranja kredita. Stoga ćemo sada pojmovno objasniti navedene vrste kamatnih stopa.

Nominalna kamatna stopa je osnovna kamatna stopa koja se ugovara na godišnjoj razini te se preračunava ako se radi o razdoblju manjem od godinu dana. Može se ugovoriti kao fiksna ili promjenjiva, a maksimalna visina joj je određena Zakonom o potrošačkim kreditima, odredbama članaka 11.b i 11.c.

Efektivni kamatnjak zapravo pokazuje koliki je stvarni iznos ugovorenog kredita, odnosno koliko odobreni kredit zaista košta dužnika, jer osim nominalne kamatne stope uključuje i različite naknade, naplaćene prilikom obrade kredita, osiguranja i sve ostale troškove kredita. Ona je svojevrstan način za jednostavniji i transparentniji prikaz kamatnih stopa i omogućuje bolju informiranost oko stanja na tržištu za donošenje konzistentnijih odluka. Ipak, u izračun efektivne kamatne stope za kredite ne uključuju se javnobilježničke pristojbe, zatezne kamate, troškovi nepridržavanja uvjeta ugovora o kreditu te poštarine. Maksimalna visina stope propisana je Zakonom o potrošačkim kreditima, odredbom članka 20.a, i Zakonom o stambenim potrošačkim kreditima, odredbom članka 17.
Varijabilne kamatne stope su kamatne stope podložne oscilacijama tijekom ugovornog razdoblja, a formirane su od fiksne marže i referentne kamatne stope po kojoj banke međusobno posuđuju novac (npr. Euribor, Zibor, Libor).

Fiksna kamatna stopa je dogovorena na početku obračunskog razdoblja ugovorenog kredita ili depozita i ostaje konstantna kroz cijelo vrijeme trajanja ugovornog razdoblja.

[25] https://www.hnb.hr/-/kamate, (pristupljeno 25.7.2020.)
[26] Pačar i Katalinić, 2011., str. 51.

U pravilu se smatra sigurnijom i pouzdanijom te je stoga uglavnom i veća od promjenjive kamatne stope.

Interkalarnu kamatnu stopu banka zaračunava od trenutka odobrenja kredita do trenutka plaćanja prvog anuiteta, ukoliko ugovorom nije drugačije utvrđeno. Obračun se provodi po algoritmu koji je ugovoren za redovnu kamatu, uzimajući u obzir stvarni broj dana.

Zatezne kamate predstavljaju iznos koji se obračunava na iznos dospjele neplaćene obveze iz ugovora o kreditu. Zakonom o obveznim odnosima propisana je maksimalna visina dozvoljene zatezne kamate.

Sada ćemo ukratko pojmovno odrediti još nekoliko vrsta kamatnih stopa i pojasniti njihov utjecaj na svakodnevno poslovanje, tržišnu ravnotežu i cjelokupni financijski sustav. To su:

- Referentne kamatne stope imaju ključnu ulogu na financijskom tržištu. One su svojevrstan pokazatelj troška zaduživanja banaka kod drugih financijskih i kreditnih institucija, odnosno troška pribavljanja kapitala iz tuđih izvora, primjerice mirovinskih fondova, novčanih fondova, osiguravajućih društava te drugih banaka. Tako se npr. Euribor, koji je jedan od validnijih i referentnijih pokazatelja cijene novca, uzima kao prosječna stopa međusobno danih zajmova banaka neosiguranih novčanih sredstava. Njegovom se promjenom mijenja i kamatna stopa te se rizik promjene prebacuje s banke na dužnika.
- Trezorski zapisi su kratkoročni utrživi vrijednosni papiri koje izdaju državni trezori (Ministarstva financija) te se stoga smatraju nerizičnim vrijednosnim instrumentima, a mogu ih izdavati i jedinice lokalne uprave. Najčešće imaju rok dospijeća 91, 182 ili 364 dana s denominacijom[27] od 100000 kuna. Upis trezorskih zapisa obavlja se na aukcijama koje objavljuje Ministarstvo financija Republike Hrvatske gdje se prodaju uz diskont po cijeni nižoj od nominalne, dok se o dospijeću isplaćuje nominalna cijena.[28]

[27] denominacija - promjena nominalne vrijednosti novčane jedinice koja se provodi zamjenom novca novcem manje ili veće vrijednosti u vrijeme monetarne reforme ili uslijed visoke inflacije
[28] https://www.rbainvest.hr/-/trezorski-zapis, (pristupljeno 5.9.2020.)

- Kamatna stopa izražava se u postotku, a formira se kao suma ukupne marže i bazne kamatne stope koja je sačinjena od zbroja najviše tri promjenjiva čimbenika, a to su premija rizika, cijena regulacije i tržišna kamatna stopa. Tžišna kamatna stopa je zapravo referentna kamatna stopa (ZIBOR za ugovore u kunama, a LIBOR/EURIBOR za plasmane i sredstva u međunarodnim valutama). Premija rizika tržišta predstavlja premiju kreditnog rizika Republike Hrvatske, a cijena regulacije je tržišno zavisni dio i kao takva predstavlja dodatni trošak banke koji je neovisan o njenoj poslovnoj politici, a u potpunoj zavisnosti od utjecaja specifičnih propisa o visini obvezne pričuve i minimalnoj stopi pokrića deviznih obveza s kratkoročnim deviznim potraživanjima).[29]
- Eskontna, odnosno diskontna kamatna stopa je jedan od značajnijih instrumenata monetarno-kreditne politike jer se njezinom manipulacijom utječe na visinu novčanog optjecaja. Drugim riječima, ona je "oruđe" kojim središnja banka utječe na ponudu i potražnju za novcem, a temeljem njene visine formiraju se kamate na tržištu.[30]
- Nacionalna referentna stopa (NRS) je zapravo stopa prosječnih troškova pribavljanja kapitala hrvatskoga bankovnog sektora, a koristi se za određivanje visine varijabilnog dijela promjenjive kamatne stope na kredite u kunama i uz valutnu klauzulu u eurima.[31]

Banke dakle, posluju s četiri vrste redovnih kamata, a uz već navedene fiksne i promjenjive kamatne stope koriste se i:

- Portfeljno[32] promjenjive kamatne stope su stope koje se mogu mijenjati na temelju posebne Odluke Banke za određeni portfelj kredita/depozita. Bitno je naglasiti da se usklađivanje kamatnih stopa provodi na razini portfelja, a ne pojedinačnog ugovora o kreditu/depozitu. No, ukoliko je kamatna stopa ugovorena dvočlano, usklađivanje se provodi na ugovornom parametru. Međutim, menadžment banke zadržava pravo da, unatoč promjeni vrijednosti parametara, ne provede promjenu portfeljno promjenjivih kamatnih stopa

[29] https://www.rba.hr/documents/20182/122748/arhiva-2012-01-01_Nacela_za_utvrdjivanje_kamatnih_stopa_i_naknada/b2921f56-0fa4-ac9c-e2ac-f7afda8e710f, (pristupljeno 5.9.2020.)
[30] https://www.moj-bankar.hr/Kazalo/E/Eskontna-kamatna-stopa, (pristupljeno 26.7.2020.)
[31] https://www.erstebank.hr/, (pristupljeno 5.9.2020.)
[32] portfelj - skup financijskih sredstava koje neki pojedinac ili poduzeće posjeduje

ukoliko ocijeni da će tako poboljšati konkurentsku poziciju banke na financijskom tržištu i tržištu kapitala.[33]

- Plutajuće kamatne stope su promjenjive tijekom ugovornog razdoblja i to u pravilu na prvi dan obračunskoga razdoblja, ali mogu biti promijenjene i tijekom obračunskoga razdoblja ili po isteku obračunskoga razdoblja ako se tako dogovori. Promjenjiva može biti osnovica za obračun, razdoblje obračuna ili visina kamatne stope pa je nije moguće odrediti unaprijed. Parametri koji utječu na promjenu kamatnih stopa tijekom ugovornoga razdoblja determinirani su ugovorom.[34]

U poslovnoj praksi svaka banka ima javno dostupan *Pravilnik o obračunu kamata i naknada* kojim se utvrđuju vrste i visina kamatnih stopa, metode njihova obračuna, način naplate, obračunska razdoblja, početak kapitalizacije, izračun efekivne kamatne stope i sl.

4. NOMINALNI, KONFORMNI, RELATIVNI I EKVIVALENTNI KAMATNJACI U DEKURZIVNOM I ANTICIPATIVNOM OBRAČUNU

4.1. Nominalni kamatnjak

Zakonom ili ugovorom propisani kamatnjak za određeni vremenski interval naziva se nominalni kamatnjak. Ako su vremenski interval na koji se odnosi nominalni kamatnjak i vremenski interval ukamaćivanja jednake duljine, onda se nominalni kamatnjak izravno primjenjuje u obračunu kamata. No, ukoliko su različite duljine, tada je neophodno preračunati nominalni kamatnjak na vremenske intervale ukamaćivanja tj. determinirati koliko se puta *(m)* provodi obračun kamata u odnosu prema vremenskom intervalu na koji se odnosi nominalni kamatnjak, primjenom sljedeće formule:

$$m = \frac{d_1}{d_2},$$

[33] https://www.rba.hr/documents/20182/122748/arhiva-2014-01-01_rba-nacela-utvrdivanje-promjene/50e7688f-120, (pristupljeno 8.8.2020.)
[34] https://www.rba.hr/documents/20182/24371/Pravilnik+o+obra%C4%8Dunu+kamata+i+naknada/, (pristupljeno 5.9.2020.)

gdje d_1 predstavlja duljinu vremenskog intervala za nominalni kamatnjak, a d_2 duljinu vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje.[35]

Dakle, ako se vremenski interval koji se odnosi na nominalni kamatnjak i interval u kojem se obračunavaju kamate ne podudaraju, onda se svi potrebni elementi obračuna kamata moraju izraziti u vremenskom intervalu u kojem se obračunavaju kamate. Odgovor na pitanje koju kamatnu stopu pripisati za kraća ili dulja vremenska razdoblja mogu dati pojmovi relativne i konformne kamatne stope.[36]

Na primjeru[37]:

a) Ako je $p = 4$ godišnji kamatnjak, a ukamaćivanje godišnje, tada je $d_1 = 1\mathrm{G}$, $d_2 = 1\mathrm{G}$ $(\mathrm{G} = \mathrm{godina})$:

$$m = \frac{1\mathrm{G}}{1\mathrm{G}} = 1.$$

b) Ako je $p = 4$ godišnji kamatnjak, a ukamaćivanje polugodišnje (P), tada je $d_1 = 1\mathrm{G}$, $d_2 = 1\mathrm{P}$:

$$m = \frac{1\mathrm{G}}{1\mathrm{P}} = \frac{2\mathrm{P}}{1\mathrm{P}} = 2.$$

c) Ako je $p = 4$ polugodišnji kamatnjak, a ukamaćivanje godišnje, tada je $d_1 = 1\mathrm{P}$, $d_2 = 1\mathrm{G}$:

$$m = \frac{1\mathrm{P}}{1\mathrm{G}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{G}}{1\mathrm{G}} = \frac{1}{2}.$$

Stoga, kada je:

a) $m = 1$, duljina vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka i ukamaćivanja su jednake,
b) $m > 1$, duljina vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka veća je od vremenskog intervala ukamaćivanja,
c) $m < 1$, duljina vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka manja je od vremenskog intervala ukamaćivanja.

35 Relić, 2002., str. 133.
36 Štambuk, 2006., str. 150.
37 Relić, 2002., str. 133.

4.2. Relativni kamatnjak

Kamatna stopa se najčešće primjenjuje u obliku godišnje kamatne stope, no obračun se kamata nerijetko vrši i polugodišnje, kvartalno ili mjesečno. Stoga, ako zadanu godišnju kamatnu stopu p podijelimo s brojem obračunskih perioda jedne godine m tj. ako se nominalni kamatnjak p podijeli s m dobivamo relativnu kamatnu stopu[38]:

$$\bar{p}_r = \frac{p}{m}.$$

Implementacijom relativnog kamatnjaka ne dobiva se isti iznos kamata kao primjenom nominalnog kamatnjaka. Naime, iznos kamata dobiven primjenom nominalnog kamatnjaka je:

a) veći od iznosa kamata dobivenog uz relativni kamatnjak ako je 0 < m < 1 ili

b) manji od iznosa kamata dobivenog uz relativni kamatnjak ako je m > 1.[39]

4.2.2. Relativni kamatnjak kod dekurzivnog ukamaćivanja

Primjer 25.

Na koju vrijednost naraste iznos od 100000 kn na kraju desete godine ako je godišnji kamatnjak 5 uz složen dekurzivni godišnji i polugodišnji obračun kamata?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000,$

$p = 5,$

$n = 10$

a) godišnji obračun:

$$m = \frac{1\text{G}}{1\text{G}}, r = 1 + \frac{p}{100} = 1.05,$$

[38] Perić, 2009., str. 283.
[39] Šegota, 2012., str. 55.

pa je uz formulu za dekurzivni obračun

$C_{10} = C_0 r^{10} = 100000 \cdot 1{,}05^{10} = 162889{,}46 \text{ kn},$

b) polugodišnji obračun:

$$m = \frac{1\text{G}}{1\text{P}} = \frac{2\text{P}}{1\text{G}} = 2,$$

iz čega je

$$\bar{p}_r = \frac{p}{m} = \frac{5}{2} = 2{,}5,$$

$$\bar{r} = 1 + \frac{\bar{p}_r}{100} = 1{,}025.$$

Budući da je obračun polugodišnji i vrijeme izražavamo tako, pa je ono

$n = 10$ godina, odnosno $\text{t} = 2 \cdot 10 = 20$ polugodišta.

Stoga je

$$\bar{C}_{20} = C_0 \cdot \bar{r}^{20} = 100000 \cdot 1{,}025^{20} = 163861{,}64 \text{ kn}.$$

Napomenimo da je konačna vrijednost glavnice veća uz relativni kamatnjak nego uz nominalni kamatnjak jer je $m > 1$.

Primjer 26.

Na koju vrijednost naraste iznos od 100000 kn na kraju desete godine ako je polugodišnji kamatnjak 5 uz složen dekurzivni godišnji i polugodišnji obračun kamata?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000 \text{ kn},$

$p = 5,$

$n = 10,$

a) godišnji obračun:

$$m = \frac{1\text{P}}{1\text{G}} = \frac{\frac{1}{2}\text{G}}{1\text{G}} = \frac{1}{2},$$

$$\bar{p}_r = \frac{p}{m} = \frac{5}{0{,}5} = 10,$$

pa je

$$\bar{r} = 1 + \frac{\bar{p}_r}{100} = 1{,}1$$

$$\bar{C}_{10} = C_0 \cdot \bar{r}^{10} = 100000 \cdot 1{,}1^{10} = 259374{,}25 \text{ kn},$$

b) polugodišnji obračun:

$$m = \frac{1\text{P}}{1\text{P}} = 1,$$

pa je

$$\bar{r} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05.$$

Opet, budući da je obračun polugodišnji, i vrijeme izražavamo tako, pa je

$t = 2n = 2 \cdot 10 = 20$ polugodišta

$$\bar{C}_{10} = C_0 \cdot \bar{r}^{20} = 100000 \cdot 1{,}05^{20} = 265329{,}77 \text{ kn}.$$

4.2.2. Relativni kamatnjak kod anticipativnog ukamaćivanja

U anticipativnom obračunu, ako vremenski interval nominalnog kamatnjaka i interval ukamaćivanja nisu jednake duljine, potrebno je nominalni kamatnjak preračunati u relativni ili konformni kamatnjak.

U primjeru za relativni kamatnjak to izgleda ovako[40]:

$$q_r = \frac{q}{m}.$$

m - prikazuje odnos broja obračuna kamata prema vremenskom intervalu nominalnog kamatnjaka i računa se na isti način kao kod dekurzivnog kamatnjaka:

$$m = \frac{d_1}{d_2},$$

gdje su:

d_1 - duljina vremenskog intervala nominalnog ukamaćivanja,

d_2 - duljina vremenskog intervala ukamaćivanja.

---

[40] Relić, 2002., str.182.

Primjer 27.

Na koju vrijednost naraste iznos od 100000 kn na kraju desete godine ako je godišnji kamatnjak 5 uz složen anticipativni godišnji i polugodišnji obračun kamata?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000$ kn,

$q = 5$,

$n = 10$,

a) godišnji obračun:

$$C_n = C_0 \left(\frac{100}{100 - q} \right)^n,$$

$$C_{10} = 100000 \left(\frac{100}{100 - 5} \right)^{10} = 167018{,}26 \text{ kn},$$

b) polugodišnji obračun:

$t = 2n = 2 \cdot 10 = 20$

$$\bar{q}(P) = \frac{q}{m} = \frac{5}{2} = 2{,}5,$$

,

$$C_{10} = 100000 \left(\frac{100}{100 - 2{,}5} \right)^{20} = 165923{,}42 \text{ kn}.$$

Kada vremenski interval na koji se odnosi nominalni kamatnjak i vremenski interval ukamaćivanja nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalni kamatnjak na vremenske intervale ukamaćivanja. Kao što se vidi iz primjera, primjenom nominalnog i relativnog kamatnjaka dolazi se i do različitih rezultata. S m označavamo omjer razdoblja nominalnog kamatnjaka i razdoblja ukamaćivanja. Relativni kamatnjak p_r računamo tako da nominalni tj. zadani kamatnjak podijelimo s m. Anticipativni relativni kamatnjak q_r računamo na isti način, tj. primjenom formule:

$$q_r = \frac{q}{m}.$$

Primjer 28.

Kolika je vrijednost početnog iznosa od 20 000 kuna na kraju osme godine uz godišnji kamatnjak 5% ako je obračun kamata složen, dekurzivan te a) godišnji, b) polugodišnji i c) mjesečni?

a) Kao što već znamo, kod godišnjeg, složenog i dekurzivnog obračuna, primjenjuje se standardna formula $C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, pa je

$$C_8 = 20000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^8 = 29549{,}11 \text{ kn.}$$

b) Moramo koristiti relativni kamatnjak, jer je obračun polugodišnji dok se kamatnjak odnosi na cijelu godinu:

$$C_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^{n \cdot m}$$

$$C_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{100}\right)^{8 \cdot 2} = 29690{,}11 \text{ kuna.}$$

c) U ovoj varijanti zadatka, m će nam biti 12, budući da godina ima 12 mjeseci, tako da možemo upotrijebiti istu formulu kao u primjeru b):

$$C_8 = 20000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{5}{12}}{100}\right)^{8 \cdot 12} = 29811{,}71 \text{ kuna.}$$

Izvor: izrada autora

Možemo zaključiti da su u prethodna 3 slučaja svi iznosi različiti, a kako bismo dobili uvijek isti iznos, koristit ćemo konformni kamatnjak o čemu će više biti riječi u narednom potpoglavlju.

Primjer 29.

Kolika je vrijednost početnog iznosa od 100 000 kuna na kraju šeste godine uz godišnji kamatnjak 7% ako je obračun kamata složen, dekurzivan te dvogodišnji?

Rješenje:

Kod dvogodišnjeg obračuna bitno je napomenuti da ćemo u zadanih šest godina godina ukamaćivati svega tri puta, odnosno upola manje, pa kad u formulu uvrstimo $m = \frac{1}{2}$, dobijemo da je

$$C_6 = 100000 \cdot \left(1 + \frac{\frac{7}{\frac{1}{2}}}{100}\right)^{6 \cdot \frac{1}{2}} = 148154{,}40 \text{ kuna.}$$

Izvor: izrada autora

4.3. Konformni kamatnjak

Zbog različitih rezultata izračuna s relativnim i nominalnim kamatnjacima pri istim veličinama i razdobljima, javlja se potreba za kamatnjakom kojim je to moguće izbjeći. Tu se pojavljuje konformni kamatnjak u kojeg možemo preračunati nominalni kamatnjak i u obračunu kamata dobiti isto rješenje.[41] Naime, primjenom konformnog kamatnjaka uz *m* ukamaćivanja dobit ćemo identičan iznos kamata kao i primjenom nominalnog kamatnjaka uz jedno ukamaćivanje. Ako je ukamaćivanje složeno, izračunamo konformni ispodgodišnji kamatnjak, a ako je pak jednostavno, računat ćemo relativni ispodgodišnji kamatnjak. Bitno je naglasiti da je konformni ispodgodišnji kamatnjak uvijek manji od relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.[42]

4.3.1. Konformna kamatna stopa kod dekurzivnog ukamaćivanja

Nominalnu (ugovorenu) kamatnu stopu p možemo preračunati na takvu kamatnu stopu p' kojom će se, češćom ili rjeđom kapitalizacijom u nekom drugom vremenskom intervalu, ostvariti jednaki iznos kamata, pa samim time i jednaka konačna vrijednost. Takav kamatnjak nazivat ćemo dekurzivni konformni kamatnjak.

Uz zadanu kamatnu stopu p dekurzivni kamatni faktor r iznosi $r = 1 + \frac{p}{100}$, dok dekurzivni konformni kamatni faktor r_m računamo primjenom formule $r_m = 1 + \frac{p'}{100}$

[41] Gruić i dr., 2011., str. 84.
[42] Šegota, 2012., str. 63.

gdje je p' dekurzivna kamatna stopa, odnosno dekurzivni kamatni faktor računamo iz:

$$C_o \cdot r = C_o \cdot (r_m)^m \Rightarrow r_m = \sqrt[m]{r} \Rightarrow r_m = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}},$$

odakle imamo

$$1 + \frac{p'}{100} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}},$$

iz čega slijedi

$$p' = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right).$$

Kamatna stopa *p'* ima svojstvo da su uz njenu primjenu m puta tijekom godine ukupne složene kamate jednake kamatama dobivenima primjenom nominalne kamatne stope p jedanput godišnje.[43]

U obračunima se češće koristi kamatni faktor *r* nego sama kamatna stopa *p*. U slučaju kad se primjenjuje relativna kamatna stopa, kažemo da se primjenjuje proporcionalna metoda obračuna kamata, dok kad se primjenjuje konformna kamatna stopa, kažemo da se primjenjuje konformna metoda obračuna kamata.

Primjer 30.

Na koju vrijednost naraste iznos od 100000 kn na kraju desete godine ako je polugodišnji kamatnjak 5 uz složen dekurzivni polugodišnji obračun kamata prema izračunu konformnim kamatnjakom?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000$ kn,

$p = 5$,

$n = 10$, $t = 2n = 20$.

Prvo izračunamo *m* za polugodišnji obračun:

[43] Perić, 2016., str. 284.

$$m = \frac{1\text{G}}{1\text{P}} = \frac{2\text{P}}{1\text{G}} = 2,$$

pa konformnu kamatnu stopu prema

$$p' = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right),$$

pa je

$$p' = 100 \cdot \left(\sqrt[2]{1 + \frac{5}{100}} - 1\right) = 2{,}46950766,$$

$$r_m = 1 + \frac{p'}{100} = 1{,}024695077,$$

te je stoga

$C'_{20} = C_0 \cdot (r')^n = 100000 \cdot 1{,}024695077^{20} = 162889{,}46 \text{ kuna.}$

Vidimo da smo, uz iste zadane vrijednosti, primjenom konformnog kamatnjaka uz polugodišnji obračun kamata dobili jednak konačni iznos kapitala kao i primjenom nominalnog godišnjeg kamatnjaka (Primjer 25).

Primjer 31.

Uz zadani godišnji kamatnjak 8%, na koju vrijednost će narasti glavnica iznosa 50000 kuna na kraju sedme godine? Obračun kamata je dekurzivan, polugodišnji uz konformnu kamatnu stopu.

Rješenje :

Dakle, s obzirom da je obračun polugodišnji, a kamatnjak je godišnji, *m* će nam iznositi 2, a imamo poznate sljedeće vrijednosti:

$p = 8\ \%,$

$n = 7 \text{ godina,}$

$C_0 = 50000 \text{ kuna}$

$C_n = ?$

Kako bismo mogli primijeniti formulu za izračun konačnog iznosa uz dekurzivan obračun kamata i konformni kamatnjak, prethodno moramo izračunati konformni kamatnjak po slijedećoj formuli:

$$p' = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

$$p' = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 3{,}923048454\ \%$$

$$C_{n,m} = C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^{n \cdot m}$$

$$C_{n,m} = 50000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}923048454}{100}\right)^{7 \cdot 2} = 85691{,}21 \text{ kuna.}$$

Vidljivo je da je u navedenom primjeru, uz zadane uvjete, glavnica iznosa 50 000 kuna narasla na 85691,21 kuna.
Izvor: izrada autora

Ukoliko bismo primjerice imali zadanu konformnu kamatnu stopu, a trebali bismo izračunati nominalni kamatnjak, upotrijebili bismo formulu:

$$p = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p'}{100}\right)^{m} - 1\right].$$

4.3.2. Konformna kamatna stopa kod anticipativnog ukamaćivanja

Kod anticipativnog obračuna kamata nužno je vremenski uskladiti njegove elemente ukoliko se razdoblje na koje se odnosi nominalna kamatna stopa ne podudara s elementarnim razdobljem ukamaćivanja, odnosno, u tom slučaju i kod ovog obračuna treba izračunavati relativnu ili konformnu kamatnu stopu.[44]

Konformni kamatnjak q' određuje se iz jednakosti[45]:

$$1 - \frac{q}{100} = \left(1 - \frac{q'}{100}\right)^{m},$$

[44] Gruić i dr., 2011., str. 95.
[45] Šegota, 2012., str. 62.

iz čega dobijemo matematički izraz za konformni kamatnjak uz primjenu anticipativnog načina obračuna:

$$q' = 100 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{q}{100}\right)^{\frac{1}{m}}\right],$$

odnosno

$$q' = 100 \cdot \left[1 - \sqrt[m]{\frac{100}{100 - q}}\right],$$

pri čemu, dakle, simboli imaju sljedeće značenje:

q' – anticipativni konformni kamatnjak,

q – anticipativni nominalni kamatnjak te

m – broj obračunskih razdoblja unutar jednog razdoblja nominalnog kamatnjaka.

Konformni kamatni faktor kod anticipativnog ukamaćivanja računamo primjenom formule:

$$\rho' = \sqrt[m]{\rho}.$$

Primjer 32.

Na koju vrijednost naraste iznos od 100000 kn na kraju desete godine ako je godišnji kamatnjak 5 uz složen anticipativni godišnji i polugodišnji obračun kamata?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000$ kn,

$q = 5$,

$n = 10$,

$m = 2$,

a) godišnji (nominalni):

$$C_n = C_0\left(\frac{100}{100 - q}\right)^n,$$

$$C_{10} = 100000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 5}\right)^{10} = 167018{,}26 \text{ kn}.$$

b) polugodišnji (konformni):

Prema formuli:

$$q' = 100 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{q}{100}\right)^{\frac{1}{m}}\right] = 100 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$q' = 100 \cdot \left[1 - 0{,}95^{\frac{1}{2}}\right] = 2{,}532056552$$

te za anticipativni obračun C_n prema formuli iznosi

$$C'_{20} = 100000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 2{,}532056552}\right)^{20} = 167018{,}26 \text{ kn.}$$

4.4. Ekvivalentni kamatnjaci

Budući da se uz iste uvjete anticipativnim obračunom kamata dobiva veća konačna vrijednost glavnice nego dekurzivnim obračunom, kako bismo ih izjednačili, neovisno o tome je li obračun kamata dekurzivan ili anticipativan, moramo primijeniti različite kamatnjake.

Da bi vrijedila jednakost $C_0 r^n = C_0 \rho^n$, odnosno $C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = C_0\left(\frac{100}{100 - q}\right)^n$, kamatni faktori također moraju biti izjednačeni ($r = \rho$), tj. $1 + \frac{p}{100} = \frac{100}{100 - q}$.

Ukoliko je obračun kamata anticipativan, a želimo odrediti sadašnju ili konačnu vrijednost glavnice, tada postoje isključivo dva načina njihovog određivanja: ili uporabom formula za anticipativni obračun kamata ili pak da se najprije izračuna ekvivalentni dekurzivni kamatnjak i uvrsti u odgovarajuće formule za dekurzivni način obračuna kamata. Ukoliko, dakle, imamo zadan dekurzivni kamatnjak p, formulom $q = \frac{100 \cdot p}{100 + p}$ možemo odrediti njegov anticipativni ekvivalent. No, najčešće se u primjenama anticipativno ukamaćivanje svodi na dekurzivno, korištenjem ekvivalentnog dekurzivnog kamatnjaka p kojeg računamo pomoću formule $p = \frac{100 \cdot q}{100 - q}$.[46]

[46] Relić, 2002., str.185 - 187.

Primjer 33.

Odredimo konačnu vrijednost glavnice za iznos 100000 kuna i ukupne kamate ako taj iznos stoji na banci 5 godina uz p = 8% i složeno godišnje anticipativno ukamaćivanje. Koliko iznosi ekvivalentni dekurzivni kamatnjak koji bi dao konačnu vrijednost jednaku onoj uz anticipativno složeno ukamaćivanje?

Rješenje:

Znamo:

$C_0 = 100000$ kn,

$p = 8$,

$n = 5$.

Prema relacijama za izračun ekvivalentnog kamatnjaka, potrebno je prvo izračunati kamatnu stopu q koja je ekvivalent zadanoj dekurzivnoj kamatnoj stopi p.

$$q = p \cdot \frac{100}{100+p} = 8 \cdot \frac{100}{100+8} = 7.407407407\%.$$

Sada ćemo izračunati anticipativni kamatni faktor:

$$\rho = \frac{100}{100 - q} = \frac{100}{100 - 7{,}407407407} = 1{,}08,$$

pa izračunati konačnu vrijednost glavnice:

$$C_n = C_5 = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n = 100000 \cdot \left(\frac{100}{7{,}407407407}\right)^5 = 100000 \cdot 1.08^{\,5} = 146932{,}81 \text{ kn}.$$

Za konačnu glavnicu prema formuli za dekurzivan obračun dobili smo jednak rezultat:

$$C_n = C_5 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 100000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 = 100000 \cdot 1.08^{\,5} = 146932{,}81 \text{ kn}.$$

4.5. Neprekidno ukamaćivanje

Neprekidno ili kontinuirano ukamaćivanje podrazumijeva neprekidno obračunavanje kamata, odnosno o njemu govorimo ako između dvaju obračuna i njihovog pribrajanja glavnici nema vremenskog diskontinuiteta, već se kamate obračunavaju i pribrajaju glavnici u svakom trenutku razdoblja kapitalizacije. Budući da se rast može prikazati ukamaćivanjem u beskonačno malim vremenskim jedinicama, neprekidnim ukamaćivanjem lako možemo izračunati prirodan prirast. Ako, dakle, pretpostavimo da broj jediničnih razdoblja m teži k beskonačnosti vrijedi

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{np}{100}}.$$ [47]

Valja naglasiti da premda ovakav specijalan način složenog ukamaćivanja nije primjenjiv u bankovnoj praksi, nego se koristi u medicini pri određivanju prirodnog prirasta, u makroekonomiji, odnosno općenito kod prirodnih pojava.[48]

Primjer 34.

Na koliko će narasti drvna masa u šumi za 15 godina ako trenutno iznosi 5555 m^3, a prosječni godišnji prirast je 5,7%?

Rješenje:

$C_0 = 5555\ m^3$,

$n = 15$ godina,

$\underline{p = 5{,}7\%}$

$C_n = ?$

$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{np}{100}}$

$C_n = 5555 \cdot e^{\frac{5{,}7 \cdot 15}{100}} = 13061{,}88\ m^3.$

Dakle, vidimo da će za 15 godina trenutna drvna masa narasti na 13061,88 $\boldsymbol{m^3}$.

Izvor: izrada autora

Primjer 35.

Koliko će dijete imati kilograma na svoj 10. rođendan, ako je rođeno sa 4 kg, a u prve tri godine prosječno dobiva na težini 5% mjesečno, naredne četiri godine 4% mjesečno, a potom 0,5% mjesečno?

---

47 Perić, 2016., str. 285.

48 Šegota, 2012., str. 75.

Rješenje:

Dakle, poznate su nam sljedeće vrijednosti:

$C_0 = 4$ kg,

$p_1 = 2{,}5\%$ mj.,

$p_2 = 2\%$ mj.,

$p_3 = 0{,}5\%$ mj.

Budući da je zadan mjesečni prirast, razdoblje moramo pretvoriti u mjesece pa je tako:

$n_1 = 3$ god. $= 36$ mj.,

$n_2 = 4$ god. $= 48$ mj.,

$\underline{n_3 = 3 \text{ god. } = 36 \text{ mj.}}$

$C_n = ?$

$$C_{120} = C_0 \cdot e^{\frac{n_1 p_1}{100} \cdot \frac{n_2 p_2}{100} \cdot \frac{n_3 p_3}{100}}$$

$$C_{120} = 4 \cdot e^{\frac{2{,}5 \cdot 36}{100} \cdot \frac{2 \cdot 48}{100} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 36}{100}}$$

Prema pravilu $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, slijedi:

$$C_{120} = 4\, e^{\frac{90 + 96 + 18}{100}} = 30{,}76 \text{ kg.}$$

Izvor: izrada autora

Primjer 36.

Uz koji godišnji prosječni prirast će se broj stabala u nekoj šumi udvostručiti za 10 godina?[49]

Rješenje:

$n = 10$ god.,

$\underline{C_n = 2\, C_0,}$

$p = \ ?$

[49] Pačar i Katalinić, 2011., str.87.

$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot n}$

$2\,C_0 = C_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot 10}$

Sada kratimo C_0 i ostane nam:

$e^{\frac{p}{10}} = 2 \,/ln$

$\frac{p}{10} = ln\,2$

$p = 10 \cdot ln\,2 = 6{,}93$ %.

5. ZAKLJUČAK

Kamatni račun kao sastavni dio ekonomske znanosti neizbježan je alat u svakodnevnoj poslovnoj praksi i kao takav je široko primjenjiv. Ovim radom pokušalo se prikazati njegovu srž i pokazati koji je način obračuna kamata povoljniji za dužnika. Na primjerima jednostavnog i složenog kamatnog računa predočene su osnovne razlike između ta dva načina obračuna kamata gdje se kod prvog kamate obračunavaju u svakom razdoblju isto na istu glavnicu, za razliku od složenog kamatnog računa koji podrazumijeva postupak izračunavanja kamata na glavnicu kojoj su u ranijim razdobljima već pripisane kamate. Kroz matematičke relacije prikazano je i kako dolazi do promjena kamatnjaka zbog različitog vremenskog intervala ukamaćivanja pri dekurzivnom ili anticipativnom načinu obračuna.

U praksi kroz poprilično jednostavne računice za oba načina vidimo razlike u uvjetima kreditiranja gdje je jasno kako je anticipativni način obračuna kamata uvijek nepovoljniji po dužnika od dekurzivnog načina. Naravno, to se događa zbog samog načina izračunavanja gdje se kod dekurzivnog obračuna kamate obračunavaju na kraju razdoblja od glavnice s početka razdoblja za razliku od anticipativnog obračuna pri kojem je obrnuto, pa se tamo kamate izračunavaju na početku razdoblja od glavnice s kraja razdoblja.

Važnost kamata je neupitna za cjelokupni financijski sustav i kroz vrste kamatnih stopa obrađena u jednom od poglavlja. Njihov je značaj i utjecaj na stabilnost tržišta, prvenstveno kroz "univerzalnu" kamatnu stopu EURIBOR, enorman jer je to poluga za bankarski sustav i bitan svojevrstan kotač ekonomije. Uz to, prikazani su i osnovni načini i metode obračuna gdje je neophodno naglasiti da zbog frekventnosti i obujma potreba za financijskim uslugama čest su slučaj nominalne iliti godišnje kamatne stope koje je moguće prilagoditi i računati unutar razdoblja od jedne godine nekoliko puta.

Ako se vremenski interval vezan uz nominalni kamatnjak i interval u obračunavanju kamata ne podudaraju, tada se svi potrebni dijelovi obračuna izražavaju u vremenskom intervalu u kojem se obračunavaju kamate. Nominalnu (ugovorenu) kamatnu stopu možemo preračunati na takvu kamatnu stopu kojom će se, češćom ili rjeđom kapitalizacijom, ostvariti jednaki iznos kamata, pa samim time i jednaka konačna vrijednost. Takav kamatnjak nazivamo konformnim kamatnjakom. U teoriji postoji i ekvivalentni kamatnjak koji izjednačava konačan iznos kod anticipativnog i dekurzivnog načina, no nema praktičnu primjenu u poslovnoj praksi. Neprekidno ukamaćivanje, iako nije primjenjivo u bankarskom poslovanju, ipak nalazi svoju primjenu u makroekonomiji, u medicini pri određivanju prirodnog prirasta i sl.

POPIS LITERATURE

1) KNJIGE I ČLANCI:

1. Crnković R., Ferišak V., Jelčić B., Kralj J., Petranović V., Petrović M., Tepšić R., Turk I., Vujković T.: *Rječnik računovodstva i financija*, Zagreb, Informator Zagreb, 1984.
2. Crnjac M., Jukić. D., Scitovski R.: *Matematika*, Osijek, Ekonomski fakultet Osijek, 1994.
3. Dabčević A., Dravinac N., Šego B., Franić I., Sekulić B., Zagreb, *Primjena matematike za ekonomiste*, Informator Zagreb, 1996.
4. Gruić, B., Jemrić, I., Šutalo, I., Volarević, H.: *Matematika za ekonomiste i managere*, III. izdanje, Zagreb, MATE d.o.o. Zagreb, 2011.
5. Klobučar A., *Matematičke metode u financijama*, Osijek, Ekonomski fakultet u Osijeku, 2018.
6. Nogić, G.: *Obračun kamata: Jednostavan i anticipativan*, Poučak 60, str. 41., 2014.
7. Pačar M. i Katalinić M., *Gospodarska i financijska matematika*, Osijek, Dvostruka Duga d.o.o. Čakovec, 2011.
8. Perić T.:, *Matematika u ekonomskoj analizi*, I. izdanje, Zagreb, Alka script, 2016.
9. Relić B., *Gospodarska matematika*, II. izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Zagreb, Računovodstvo i financije, 2002.
10. Šego B. i Lukač Z., *Financijska matematika*, Zagreb, Računovodstvo i financije, 2011.
11. Šegota A.: *Financijska matematika*, Rijeka, Ekonomski fakultet u Rijeci, 2012.
12. Štambuk, LJ.: *Poslovna matematika I*., Karlovac, Veleučilište u Karlovcu, 2009.

2) INTERNETSKI IZVORI:

1. https://www.hnb.hr/-/kamate
2. https://www.rbainvest.hr/-/trezorski-zapis
3. https://www.rba.hr/documents/20182/122748/arhiva-2012-01-01_Nacela_za_utvrdjivanje_kamatnih_stopa_i_naknada/b2921f56-0fa4-ac9c-e2ac-f7afda8e710f
4. https://www.moj-bankar.hr/Kazalo/E/Eskontna-kamatna-stopa
5. https://www.erstebank.hr/
6. https://www.rba.hr/documents/20182/122748/arhiva-2014-01-01_rba-nacela-utvrdivanje-promjene/50e7688f-120
7. https://www.rba.hr/documents/20182/24371/Pravilnik+o+obra%C4%8Dunu+kamata+i+naknada/

POPIS TABLICA

SAŽETAK

U završnom radu prezentirane su kamate i načini obračuna kamata. Pokazane su matematičke operacije i relacije koje se koriste kod jednostavnog i složenog kamatnog računa. Prezentirani su dekurzivni i anticipativni načini obrade kamata kod jednostavnog i složenog računa i kroz primjere njihova konkretna vrijednost primjenjiva u praksi. Povezano s tim, obrađene su vrste i metode obračuna kamatnih stopa i objašnjen njihov utjecaj. Također, objašnjeni su kamatnjaci koji se izračunavaju ako se interval zadanog nominalnog kamatnjaka ne podudara s vremenskim intervalom u kojem se obračunavaju kamate. U zadnjem poglavlju opisano je neprekidno ukamaćivanje. Neprekidno ukamaćivanje izračunava kamate pod pretpostavkom da će se kamate obračunavati tijekom beskonačnog broja razdoblja. Premda je neprekidno ukamaćivanje ključni koncept, nije primjenjivo u bankarskoj praksi.
KLJUČNE RIJEČI: jednostavni kamatni račun, složeni kamatni račun, anticipativni obračun, dekurzivni obračun, kamatne stope, nominalni kamatnjak, relativni kamatnjak, ekvivalentni kamatnjak, neprekidno ukamaćivanje

ABSTRACT

In this paper, interest rates and methods of interest calculation are presented. Mathematical operations and relations used in simple and compound interest calculation are shown. Decursive and anticipatory methods and examples of calculating interest in a simple and compound way, and their concrete significance applicable in practice are presented. Related to this, the types and methods of calculating interest rates are discussed and their impact is explained. Also, the interest rates that are calculated if the period of the given nominal interest rate does not coincide with the period in which the interest is calculated are explained. In the last chapter continuous compounding is described. Continuous compounding calculates interest under the assumption that interest will be compounding over an infinite number of periods. Although continuous compounding is an essential concept, it's not applicable in the banking practice.
KEY WORDS: simple interest account, compound interest account, anticipatory calculation, decursive calculation, interest rates, nominal interest rate, proportionate interest rate, conformal interest rate, equivalent interest rate, continuous compounding