

# Režimi strujanja i proračun gubitaka u cjevovodu

---

Žigant, Loris

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Pula / Sveučilište Jurja Dobrile u Puli**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:137:501608>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-08**



Repository / Repozitorij:

[Digital Repository Juraj Dobrila University of Pula](#)



Sveučilište Jurja Dobrile u Puli  
Tehnički fakultet u Puli



**Loris Žigant**

**Režimi strujanja i proračun gubitaka u cjevovodu**

Završni rad

Pula, Srpanj, 2022.

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli  
Tehnički fakultet u Puli



**Loris Žigant**

**Režimi strujanja i proračun gubitaka u cjevovodu**

Završni rad

**JMBAG: 0303092278, redovan student**

**Studijski smjer: proizvodno strojarstvo**

**Predmet: Mehanika fluida**

**Znanstveno područje: Tehničke znanosti**

**Znanstveno polje: Strojarsstvo**

**Znanstvena grana: Proizvodno strojarstvo**

**Mentor: dr.sc. Damir Karabaić, pred.**

Pula, Srpanj, 2022.

## **ZAHVALA**

*Prvenstveno se želim zahvaliti mentoru dr. sc. Damiru Karabaiću na podršci, odgovorima na moje upite u najkraćem mogućem roku, te strpljenju pri objašnjavanju svih nedoumica oko izrade završnog rada. Također želim se zahvaliti voditelju studija doc. dr. sc. Marku Kršulji i svim profesorima na savjetima tijekom studiranja. Zahvaljujem se i svojim roditeljima, te bratu na konstantnoj podršci tijekom studija, uz to se zahvaljujem svojim prijateljima i kolegama.*

dr.sc. Damir Karabaić, pred  
(Ime i prezime nastavnika)

Mehanika fluida  
(Predmet)



Tehnički fakultet u Puli

**Sveučilište Jurja Dobrile u Puli**  
**TEHNIČKI FAKULTET U PULI**  
**ZADATAK TEME ZAVRŠNOGA RADA**

Pristupniku Lorisu Žigantu

MBS: 0303092278

Studentu/ci stručnog studija Tehničkog fakulteta u Puli izdaje se zadatak za završni rad – tema završnog rada pod nazivom:

**Režimi strujanja i proračun gubitaka u cjevovodu**

Sadržaj zadatka: Prikazati i objasniti fizikalne principe strujanja realnog fluida, te laminarnog i turbulentnog strujanja i strujanja u graničnom sloju. Opisati principe i metode proračuna gubitaka strujanja u cijevima kružnog poprečnog presjeka. Na primjeru ravne cijevi kružnog poprečnog presjeka, unutarnjeg promjera 5 cm, duljine 100 m i hrapavosti 0.0015m napraviti proračun koeficijenta trenja i linijskih gubitaka kod strujanja za strujanje vode pri temperaturama 20, 40, 60 i 80 °C. Za svaku od zadanih temperatura treba pronaći granične brzine strujanja za karakteristične Reynoldsove brojeve kod kojih dolazi do promjene režima strujanja ( $Re=2300$  i  $Re=4000$ ) te za razvijeno turbulentno strujanje pri  $Re=100000$ . Dodatno treba za zadanu projektnu brzinu strujanja 2 m/s izračunati linijske gubitke strujanja za sve zadane temperature. Prikazati i vrednovati dobivene rezultate.

Rad obraditi sukladno odredbama Pravilnika o završnom radu Sveučilišta u Puli.

**Redovni ili izvanredni, proizvodno strojarstvo**

*(izvanredni, proizvodno strojarstvo)*

Datum: 29.3.2022.

Potpis nastavnika \_\_\_\_\_



## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani Loris Žigant kandidat za prvostupnika proizvodnog strojarstva ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mogega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

---

U Puli, 05.07.2022. godine



IZJAVA  
o korištenju autorskog djela

Ja, Loris Žigant dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj završni rad pod nazivom „Režimi strujanja i proračun gubitaka u cjevovodu“ koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, 05. 07. 2022

Student

---

# Sadržaj

1. Uvod .....	8
2. Strujanje viskoznog fluida.....	8
3. Laminarno strujanje .....	11
4. Turbulentno strujanje .....	13
5. Određivanje laminarnog i turbulentnog strujanja .....	16
6. Modeliranje strujanja fluida .....	20
6.1 Zakoni očuvanja .....	20
6.1.1 Reynoldsov transportni teorem.....	21
6.1.2 Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta).....	22
6.1.3 Zakon očuvanja količine gibanja .....	23
6.1.4 Zakon očuvanja momenta količine gibanja.....	25
6.1.5 Zakon očuvanja energije .....	26
6.2 Modeliranje turbulencije .....	28
6.2.1 Direct Numerical Simulation (DNS).....	28
6.2.2 Large Eddy Simulation (LES).....	28
6.2.3 RANS .....	30
6.2.4 Algebarski modeli .....	31
6.2.5 Teorija kaosa .....	32
7. Strujanje u graničnom sloju.....	32
8. Gubici strujanja u cjevovodima .....	36
9. Hidraulički proračun cjevovoda .....	45
9.1 Proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka .....	47
9.2 Ekvivalentna duljina cjevovoda .....	49
10. Primjer proračuna linijskih gubitaka strujanja.....	50
11. Zaključak .....	64
12. Popis literature .....	65



## 1. Uvod

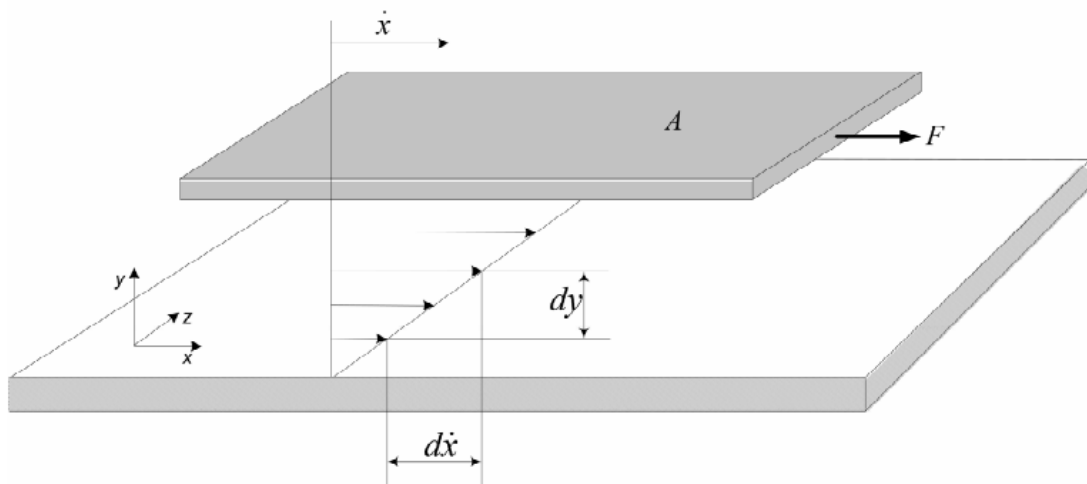
Činjenicom da se sa fluidima i njihovim strujanjima susreće kako u svakodnevnom životu tako i u inženjerskoj praksi potrebno ih je poznavati. Kod strujanja fluida u prirodi važno je istaknuti da postoje dvije vrste strujanja fluida, a to su laminarno i turbulentno strujanje, dok u nekim slučajevima kada laminarno prelazi u turbulentno prepoznajemo još jednu vrstu a to je prijelazno strujanje. Kako svako strujanje ima svoje specifikacije znači da će i ponašanje u cijevima biti različito tijekom strujanja za određeni slučaj poput navodnjavanja ili energetske iskoristivosti. Podatak koji određuje o kakvom je strujanju riječ govori nam Reynoldsov broj (Osborne Reynolds). Uslijed strujanja fluida kroz cijevi postoji problematika zbog gubitaka koji nastaju radi pojave trenja između fluida i stijenke čvrstog tijela kao i čestica fluida međusobno.

## 2. Strujanje viskoznog fluida

Viskoznost se definira kao fizikalno svojstvo koje stvara otpor strujanja fluida, ovisno o termodinamičkom stanju fluida. Viskoznost se smatra najvažnijim fizikalnim svojstvom fluida jer određuje trenje, naprezanje i otpor fluida u strujanju. Fluid se pomoću viskoznih naprezanja odupire vanjskim posmičnim silama. Fluid se pod utjecajem konstantnog posmičnog naprezanja kontinuirano deformira oslobađajući toplinu. Kako su posmično naprezanje fluida  $\tau$  i brzina kutne deformacije  $d\dot{x}/dy$  proporcionalni dolazi se do pojma dinamičke viskoznosti ili apsolutno viskoznosti  $\mu$  koja je veza između tih dviju veličina

$$\tau = \mu \cdot \frac{d\dot{x}}{dy}$$

Može se reći da je viskoznost svojstvo otpornosti fluida pomoću kojeg se fluid odupire posmičnim ili kutnim deformacijama. Za fluide koji prate odnos naprezanja i brzine kutne deformacije odnosno Newtonov zakon viskoznosti kaže se da su to Newtonski fluidi. Slijedi ilustracija viskoznosti fluida. Između dvije paralelne ploče se nalazi mirujući fluid. Mirovanjem donje ploče će i fluid koji je s njom u dodiru mirovati, dok će se fluid koji u dodiru s gornjom pločom površine A gibati jednakom brzinom  $\dot{x}$  kojom se giba ploča. Djelovanje sile u fluidu na tijelo u smjeru gibanja naziva se sila otpora, pri čemu se fluid deformira. Brzina fluida između ploča ovisi o udaljenosti  $y$ .



Slika 1. Ilustracija viskoznosti fluida [7]

Za pokretanje gornje ploče potrebna je sila koja se može izraziti kao

$$F = \tau \cdot A$$

no, uvrštavanjem Newtonovog zakona viskoznosti za fluid koji je u dodiru sa gornjom pločom u gornji izraz, dobiva se novi izraz za silu viskoznog trenja, odnosno sila potrebna za pomicanje gornje ploče.

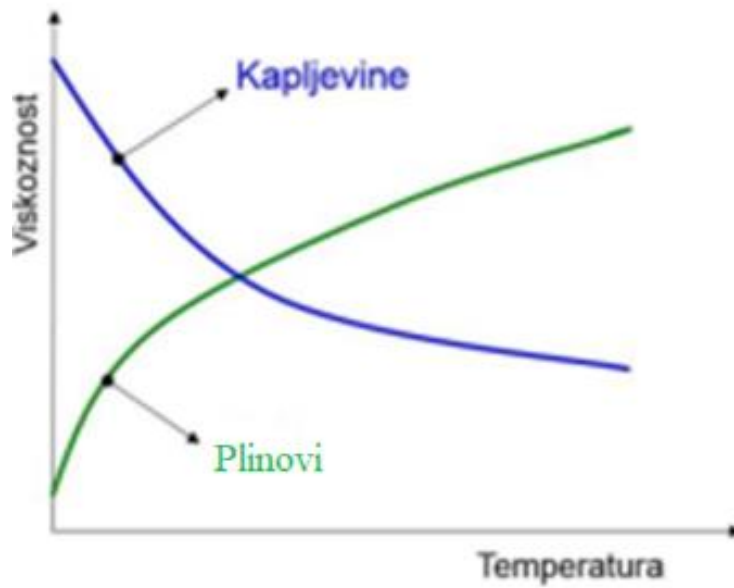
$$F = \frac{\mu \cdot A}{y} \dot{x}$$

Može se reći da je koeficijent viskoznog trenja proporcionalan površini dodira  $A$  i dinamičkoj viskoznosti  $\mu$  dok je obrnuto proporcionalan debljini fluida  $y$ . Mjerna jedinica dinamičke viskoznosti je Pa·s tj. Pascal sekunda, no koristi se još i cP odnosno centiPoise. U inženjerskoj praksi se također često koristi i kinematička viskoznost  $\nu$ , koja predstavlja omjer dinamičke viskoznosti  $\mu$  i gustoće  $\rho$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Mjerna jedinica kinematičke viskoznosti je za razliku od dinamičke  $mm^2 / s$ , ili cSt tj. centiStoke.

Viskoznost može značajno ovisiti o temperaturi i tlaku. Ponašanje viskoznosti fluida pod utjecajem temperature vidi se na slici (2).

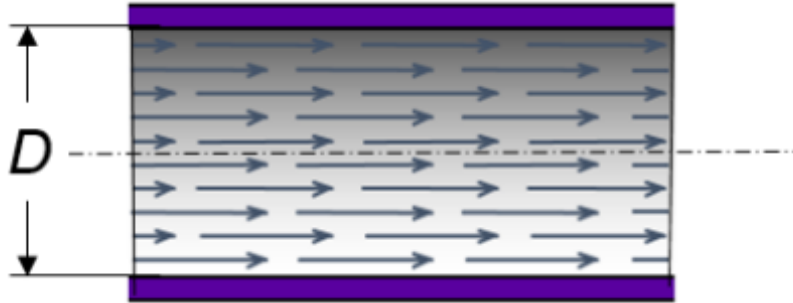


Slika 2. Promjena viskoznosti s temperaturom [5]

Prethodno opisanu ilustraciju nazivamo Couetteovim strujanjem kod kojeg se jedna od ploča pomiče konstantnom brzinom bez prisustva uzdužnog gradijenta tlaka tj.  $-dp/ds = 0$ , dok slučaj u kojemu su obje ploče u mirovanju uz prisustvo uzdužnog gradijenta tlaka nazivamo Poiseuilleovo strujanje.

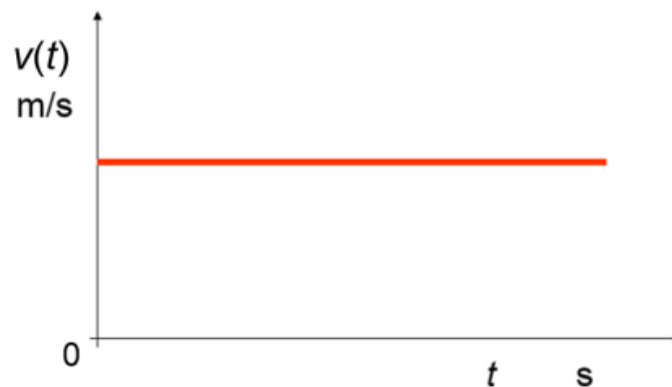
### 3. Laminarno strujanje

Laminarno strujanje se definira kao strujanje fluida u paralelnim slojevima kod manjih brzina, i igra veliku ulogu kod fluida s visokom viskoznošću poput ulja, nafte i sl.



Slika 3. Laminarni režim strujanja u cijevi [5]

Za brzinu fluida kod laminarnog režima strujanja i stacionarnog protočnog stanja fluida može se reći da je ona u određenoj točki stalna i vremenski neovisna. Glatko strujanje slojeva fluida jedan do drugog čine laminarni profil brzine stabilnim, dok je oblik strujnica određen geometrijom prostora kroz koji fluid teče npr. strujanjem fluida kroz cijev strujnice će biti međusobno paralelne.



Slika 4. Promjena brzine strujanja fluida po vremenu pri laminarnom strujanju [5]

Profil brzine laminarnog strujanja u cijevi konstantnog kružnog poprečnog presjeka ima paraboličan oblik, kojeg je moguće matematički izraziti

$$v(r) = v_{maks} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Dok za određivanje srednje brzine fluida vrijedi izraz iz jednačbe kontinuiteta

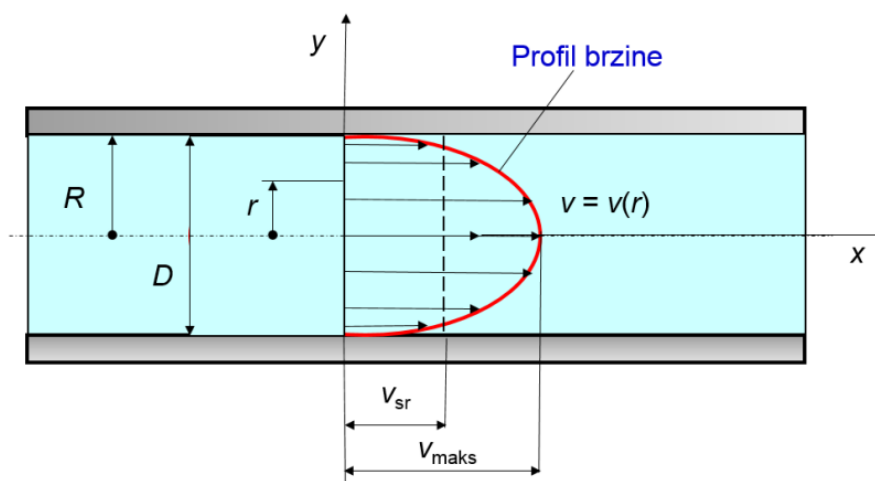
$$v_{sr} = \frac{1}{A} \cdot \int_A v \cdot dA$$

Nadalje protočna površina je jednaka površini kruga ako je cijev kružnog poprečnog presjeka, dok je  $dA$  element te površine određene debljine i polumjera

$$dA = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr$$

da bi dobili pojednostavljenu formulu za određivanje srednje brzine potrebno je integrirati izraz za srednju brzinu fluida iz jednačbe kontinuiteta sa uvrštenim odgovarajućim izrazima. Rezultat takve integracije je

$$v_{sr} = \frac{1}{2} \cdot v_{maks}$$



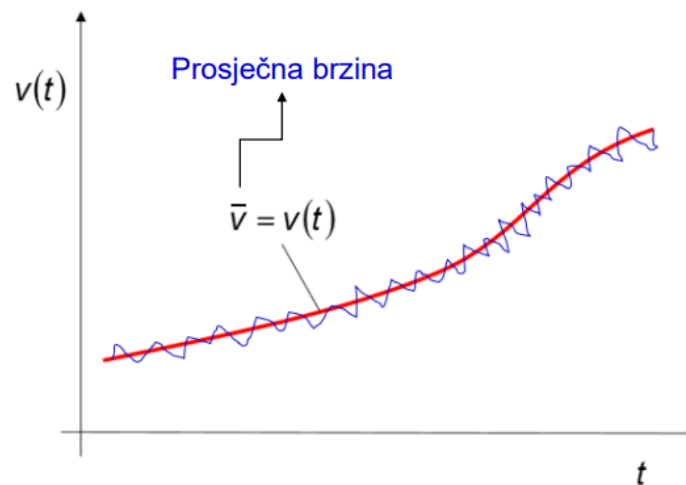
Slika 5. Profil brzine fluida laminarnog režima strujanja [5]

u slučaju integracije jednačbe kontinuiteta može se dobiti izraz za volumni protok idealnog fluida

$$q_v = \int_0^R v(r) \cdot (2 \cdot r \cdot \pi) \cdot dr$$

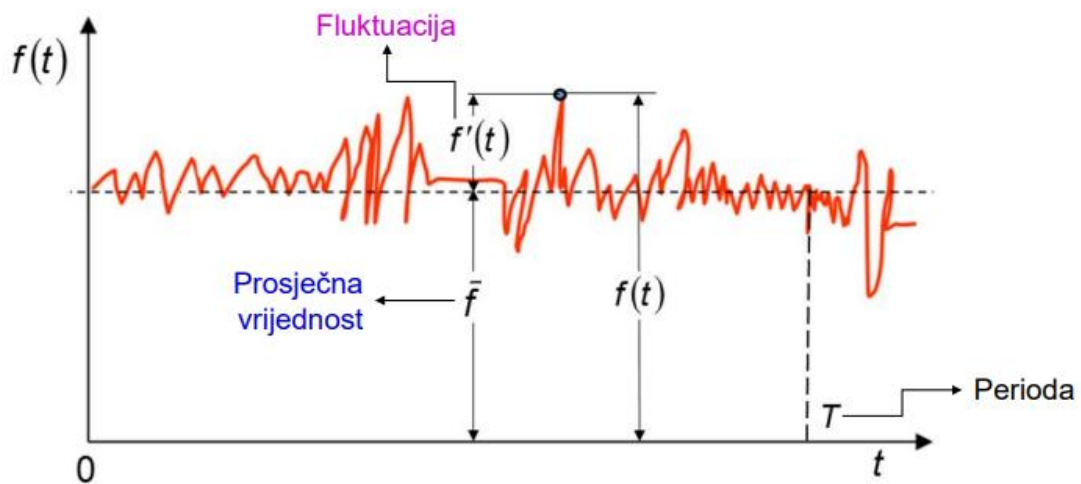
#### 4. Turbulentno strujanje

Turbulentno strujanje se može opisati kao način strujanja fluida kod kojeg se čestice fluida gibaju u vrtlozima stoga dolazi do miješanja fluida, te ga upravo zbog tih vrtloženja čestica može nazivati i vrtložno strujanje. Drugim riječima turbulentno strujanje je nepravilni i vrtložni protok fluida koji se događa u strojevima, cijevima i kanalima u nekim određenim uvjetima. Zbog unutarnjih stupnjeva slobode u turbulentnom strujanju, ono je vrlo nestacionarno za stacionarne granične uvjete, te ga je gotovo nemoguće analitički opisati.



Slika 6. Graf nestacionarnog strujanja [5]

Kod ovakvog strujanja strujnice fluida se isprepliću radi nestabilnosti, te se promjena fizikalne veličine turbulentnog strujanja po vremenu ne može predvidjeti, pa se može reći da je promjena veličine slučajna ili stohastička. Prema tome promjenjive veličine u vremenu se sastoje iz prosječnih vrijednosti i fluktuacija tih veličina



Slika 7. Promjena fizikalne veličine u vremenu pri turbulentnom strujanju [5]

Predloženi izraz za polje vremenski promjenjive veličine je

$$f(t) = \bar{f} + f'(t)$$

dok se srednja vrijednost gore navedene veličine u određenom periodu vremena definira

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

Profil brzine kod turbulentnog strujanja se za razliku od profila brzine laminarnog strujanja paraboličnog oblika zapisuje

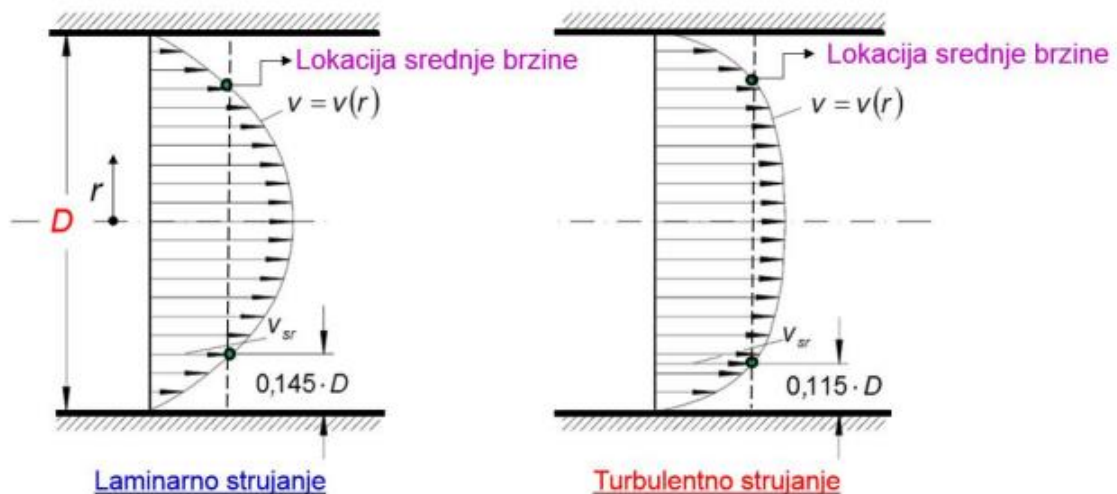
$$v(r) = v_{maks} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} = v_{maks} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

U izrazu se može uočiti eksponencijalni zakon profila brzine turbulentnog režima strujanja gdje je eksponent n ovisan o Reynoldosovom broju (Re).

Tablica 1. Ovisnost eksponenta  $n$  o Reynoldsovom broju [5]

EkspONENT - $n$	Reynoldsov broj - $Re$
6,0	$4,00 \cdot 10^3$
6,6	$2,30 \cdot 10^4$
7,0	$1,10 \cdot 10^5$
8,8	$1,10 \cdot 10^6$
10,0	$2,00 \cdot 10^6$

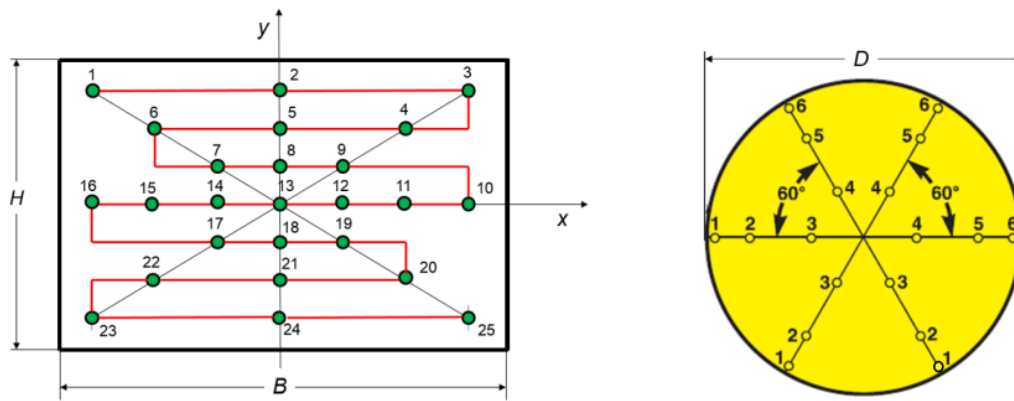
na idućoj slici prikazana je usporedba profila brzina laminarnog i turbulentnog strujanja fluida u cijevi



Slika 8. Usporedba profila brzina laminarnog i turbulentnog strujanja [5]

Kako je režim turbulentnog strujanja u praksi i svakodnevnom životu češći od laminarnog svakako je potrebno u inženjerskoj praksi znati odrediti njegove parametre poput brzine strujanja i protoka fluida koje je zbog nestacionarnog strujanja puno kompliciranije. Da bi se dobila srednja brzina strujanja fluida u npr. kanalima ili cijevima potrebno je mjeriti lokalne brzine fluida u više mjernih točaka raspoređenih po mjernoj mreži, te se na temelju dobivenih podataka putem numeričke integracije može izračunati srednja brzina strujanja i protok fluida.





Slika 9. Mrežne metode za mjerenje brzine fluida

Izraz za određivanje srednje brzine strujanja kao srednje aritmetičke vrijednosti je

$$v_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{p_d}$$

Dok je izraz za određivanje volumnog protoka sljedeći

$$q_v = \int_A v \cdot dA = v_{sr} \cdot A$$

## 5. Određivanje laminarnog i turbulentnog strujanja

Britanski znanstveni Osborne Reynolds je nakon višegodišnjih istraživanja i mjerenja potvrdio kriterije slučaja u kojem je strujanje laminarno, prijelazno ili turbulentno odnosno izveo je temeljni eksperiment za određivanje režima strujanja fluida. Zaključio je da nisu presudni zasebni parametri poput promjera protočne cijevi, brzine strujanja i viskoznosti za određivanja režima strujanja nego njihova bezdimenzijska kombinacija. Takvu bezdimenzijsku veličinu koja određuje uvjet prijelaza laminarnog u turbulentno strujanje nazivamo Reynoldsovim brojem  $Re$ . Reynoldsov broj se definira kao umnožak promjera protočne cijevi, brzine i gustoće fluida, podijeljenog s viskoznošću fluida.

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{v \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{4Q}{D\pi\nu}$$

Gdje je:

$v$ - srednja brzina

$Q$ - protok

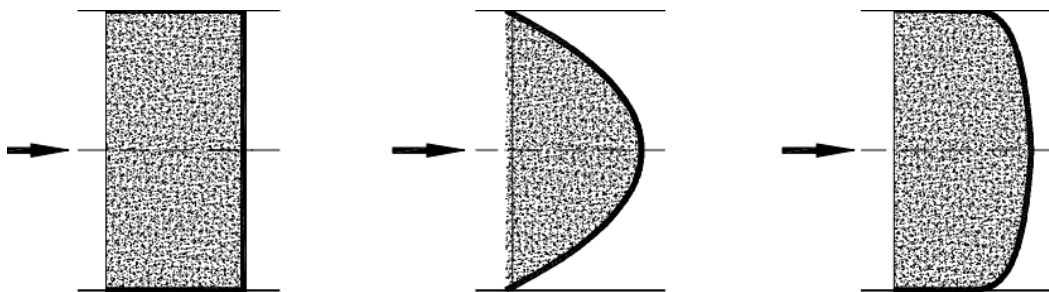
$D$ - promjer cijevi

$\nu$ - kinematski koeficijent viskoznosti

Reynoldsov broj kao fizikalno značenje je omjer inercijskih i viskoznih sila u fluidu koji se koriste kao kriteriji klasifikacije strujanja fluida. Prema tome prevladavanjem inercijskih nad viskoznim silama (veliki  $Re$  broj) strujanje teži turbulentnom, dok strujanje kod malih Reynoldsovih brojeva teži laminarnom strujanju.

Promatranjem tranzicije iz laminarnog u turbulentno strujanje, može se uočiti stanje koje nije više laminarno, te se još nije razvilo u turbulentno. Takvo stanje nazivamo prijelaznim strujanjem, koje će nastupiti prekoračenjem kritičnog Reynoldsovog broja. Usvaja se da laminarno strujanje nastupa ako je  $Re < 2300$ , te turbulentno strujanje za  $Re > 4000$ , dok se za vrijednosti između kritičnih vrijednosti pretpostavlja prijelazno strujanje. Navedene granične vrijednosti će vrijediti u većini situacija realnih strujanja, jedino ako strujanje nije provođeno u posebnim uvjetima. (Osborne Reynolds je u laboratorijskim uvjetima postignuo laminarno strujanje uz  $Re \approx 40000$ .)

Na idućoj slici (slika 10.) vidljiv je odnos oblika profila brzina laminarnog i turbulentnog strujanja i strujanja idealnog neviskoznog fluida u cijevi kružnog poprečnog presjeka.

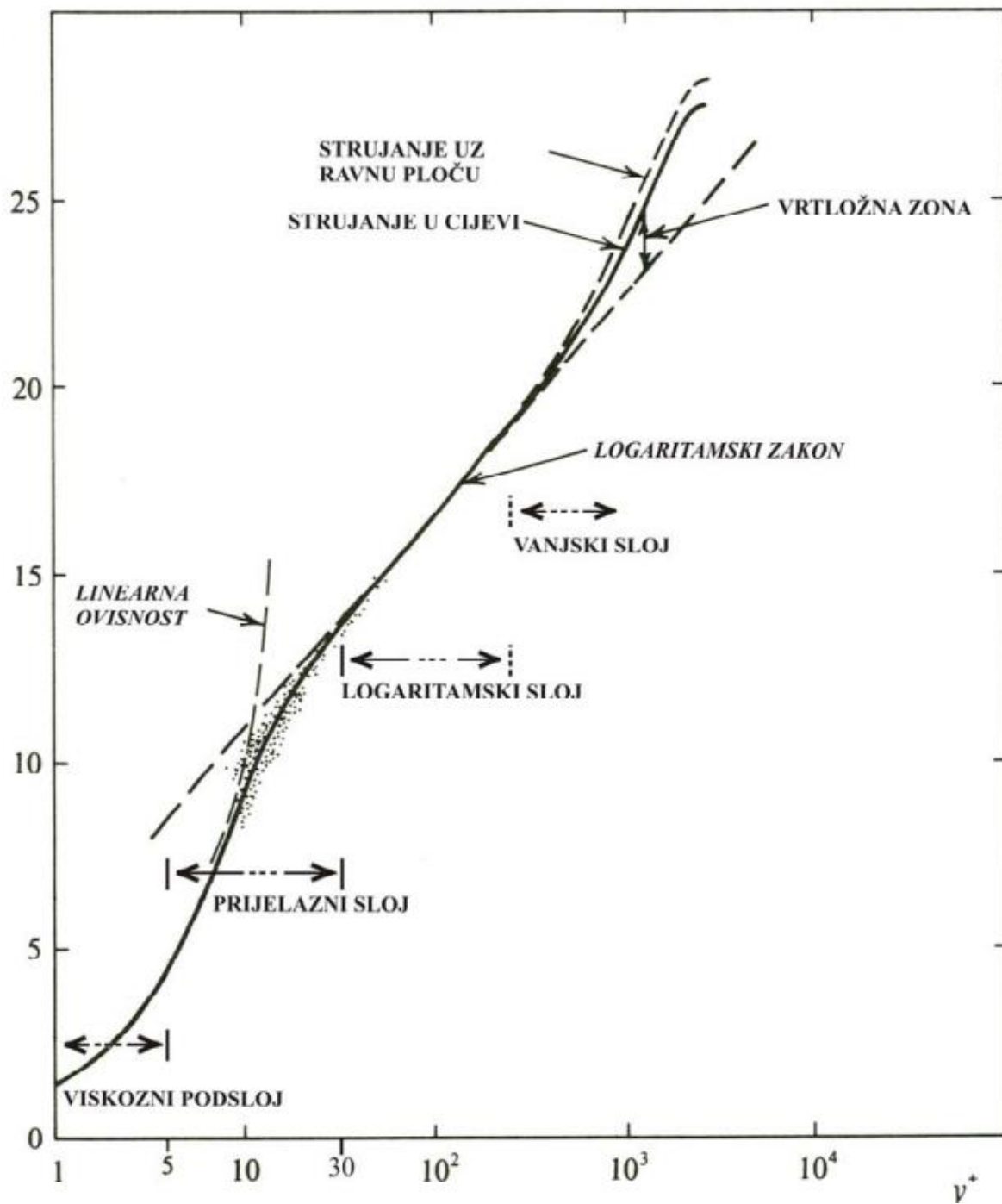


Slika 10. Idealan, laminaran i turbulentan oblik profila brzine [1]

Tijekom strujanja brzine u točki dodira realne tekućine s krutom stijenkom će biti nula, te se u središtu presjeka razvija maksimalna brzina dvostruke brzine od prosječne brzine u cijelom

presjeku, stoga laminarni profila brzina u presjeku cijevi izgleda kao rotacioni paraboloid. Dok kod turbulentnog profila brzina, radi konstantnog mijenjanja položaja čestice fluida i izmjene količine gibanja, intenzivne mase i energije odnosno procesa miješanja, poprima pravokutniji oblik u odnosu na laminarni profil brzina.

Sličnost idealnog profila sa turbulentnim profilom brzina, možemo povezati time da pri povećanju Reynoldsovog broja, profil brzina za turbulentno strujanje teži formiranju u idealni profil brzina. Kod idealnog profila brzina očito je da se fluid ne udaljava od stijenke, jer kroz cijev teče neviskozni fluid, drugim riječima viskoznost mu je jednaka nuli, dakle u njemu postoje samo inercijske sile koje podijeljene s nulom daju  $Re=\infty$ . Detaljnijim analiziranjem turbulentnog profila susreće se s pojmovima poput fluktuacije, intenzitet turbulencije, perioda fluktuacije, smično naprezanje u turbulenciji, vrtložna viskoznost, duljina miješanja. Ovisno o načinu aproksimacije turbulentni profil brzine u cijevi može se podijeliti u četiri sloja: viskozni podsloj, prijelazni sloj, logaritamski sloj, vanjski sloj. U viskoznom podsloju (područje  $0 \leq y^+ \leq 5$ ) stijenka se dodiruje sa tankim slojem fluida u kojem se srednja brzina mijenja udaljavanjem od stijenke  $y$  linearno ( $u^+ = y^+$ ). Prevladavanjem viskozno smičnog naprezanja u viskoznom podsloju, brzina je mala, te se mijenja od 0 („no slip“ uvjet) do veličine  $u^*$  za  $y^+ \approx 5$ . Prijelazni sloj je područje u kojem strujanje poprima svojstva turbulencije. U logaritamskom sloju profil brzine definira se logaritamskim zakonom zida za  $y^+ > 30$ . Logaritamski zakon zida se smatra kao poveznica viskoznog podsloja i centralne zone, te dobro aproksimira profil brzine kroz skoro cijeli presjek cijevi. Vanjski sloj se definira kao područje u kojem turbulentno smično naprezanje dominira u potpunosti



Slika 11. Turbulentni profil brzine [1]

## 6. Modeliranje strujanja fluida

### 6.1 Zakoni očuvanja

Pod osnovne zakone očuvanja za materijalnu česticu fluida na kojima se temelji dinamika fluida ubrajamo:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja
3. Zakon očuvanja momenata količine gibanja
4. Zakon očuvanja energije (prvi zakon termodinamike)

Proučavanjem dinamike fluida kao kontinuuma neophodno je definirati zakone očuvanja za materijalnu česticu kao zakone očuvanja za materijalni volumen.

Materijalni volumen možemo definirati kao skup neograničenih i neograničeno malih čestica koje su uvijek iste te čestice, dakle ne mijenjaju se u bilo kojem trenutku.

Riječima izražen zakon očuvanja mase glasi: “brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli“. Odnosno gustoća je definirana kao volumensko svojstvo, te je izvorski član ekvivalentan nuli. U takvim uvjetima zakon očuvanja mase za materijalni volumen je

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho dV = 0$$

Zakon očuvanja količine gibanja definiran je kao: “brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen“. Što je u matematičkom zapisu

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho v_i dV = \int_{MV} f_i \rho dV + \int_{MP} \sigma_i dS$$

Zakon očuvanja momenata količine gibanja za materijalni volumen

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV = \vec{M}_{MV}$$

Zakon očuvanja energije (prvi termodinamički stavak) za materijalni volumen

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho e_T dV = \dot{Q}_{MV} + \dot{W}_{MV}$$

U svim prethodno navedenim izrazima za materijalni volumen korišten je član

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \Phi dV$$

gdje je integriran  $\Phi$  (veličina po jedinici volumena) po materijalnom volumenu, te je rezultat deriviran materijalnom derivacijom po vremenu. No u inženjerskoj praksi nije potrebno promatrati gibanje samog fluida (gibanje materijalnog volumena), nego utjecaj strujanja fluida na konstrukciju sa kojom je u doticaju. Prema tome definira se kontrolni volumen.

Kontrolni volumen (KV) se može opisati kao volumen omeđen granicama odnosno kontrolnom površinom (KP) kroz kojeg s vremenom protječu materijalni volumeni, te se putem kontrolnog volumena određuju dinamički i termodinamički utjecaj fluida. Za kontrolni volumen se može reći da odgovara Eulerovom opisu gibanja fluida dok materijalni volumen pripada Lagrangeovom opisu gibanja.

### 6.1.1 Reynoldsov transportni teorem

Korištenjem Reynoldsovog transportnog teorema omogućuje se transformacija fundamentalnih zakona očuvanja sa materijalnog na kontrolni volumen.

Pretpostavka transformacije je da se materijalni i kontrolni volumen u jednome trenutku podudaraju, no s vremenom do trenutka prestanka podudaranja, materijalni volumen će odstrujati skupa s česticama koje ga sačinjavaju, dok će se kontrolni volumen nastaviti gibati ili mirovati.

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \Phi dV = \int_{KV} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{KP} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Drugim riječima, brzina kojom će se promijeniti sadržaj  $\Phi$  u materijalnom volumenu, biti će ekvivalentna brzini promjene sadržaja  $\Phi$  u kontrolnom volumenu i brzini promjene sadržaja  $\Phi$  tijekom protjecanja fluida kroz granice kontrolnog volumena odnosno kontrolne površine.

### 6.1.2 Zakon očuvanja mase (jednadžba kontinuiteta)

Upotrebom Reynoldsovog transportnog teorema na zakon očuvanja mase za materijalni volumen, formira se zakon očuvanja mase za kontrolni volumen koji je povezan Eulerovim opisom strujanja. Vrijedi da se općenita veličina zamijenila s gustoćom, odnosno  $\Phi = \rho$ , te je matematički zapis zakona

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho dV + \int_{KP} \rho v_j n_j dS$$

Odnosno, kroz vrijeme masa u kontrolnom volumenu se povećala neto utokom mase u kontrolni volumen ili smanjila neto izlazom mase iz kontrolnog volumena. Naravno utok mase određen je razlikom mase koja je ušla i one koja je izašla iz kontrolnog volumena u određenom periodu.

Primjenom Gauss-Ostrogradskog teorema na gornji izraz, plošni integral prelazi u volumni, dakle

$$\int_{KV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{KV} \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} dV = 0$$

S obzirom da je volumen proizvoljan, dopušteno ga je sažeti u točku, izraz će biti ekvivalentan nuli. Što je jednadžba kontinuiteta u diferencijalnom obliku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0$$

U slučaju stacionarnog strujanja gdje se volumen čestice fluida ne mijenja, radi se nestlačivom stacionarnom strujanju kojem je prvi član integralnog izraza jednadžbe

kontinuiteta nula, slijedi

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Drugim riječima, masa koja ulazi u kontrolni volumen će u svakom trenutku biti jednaka masi koja iz njega izlazi kroz njegove granice. Dakle vrijedi

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

Uvrštavanjem varijable volumnog protoka u prethodni izraz, koja glasi

$$Q = v \cdot A$$

Izraz se zapisuje kao

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \dot{m}$$

Za stacionarno strujanje u kontrolnom volumenu gdje je gustoća fluida konstanta vrijedi

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Što je koristan izraz za proračune u cjevovodima radi jednostavnosti pronalaženja nepoznanice brzine ili površine.

### 6.1.3 Zakon očuvanja količine gibanja

Matematički zapis zakona očuvanja količine gibanja jest

$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho v_i dV = \int_{MV} \rho f_i dV + \int_{MP} \sigma_i dS$$

No, primjenom Reynoldsovg transportnog teorema formira se u oblik zakona očuvanja količine gibanja za kontrolni volumen, koji je



$$\frac{D}{Dt} \int_{MV} \rho v_i dV = \int_{KV} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \int_{KP} \rho v_i v_j n_j dS = \int_{KV} \rho f_i dV + \int_{KP} \sigma_i dS$$

Navedeni izraz predstavlja da su promjena količine gibanja u vremenu i dotok količine gibanja u kontrolni volumen, ekvivalentni rezultantnoj sili, koja utječe na kontrolni volumen, te se sastoji od masene i površinske sile. Vektor u navedenom izrazu() može se pisati kao tenzor, odnosno tenzor naprezanja(), te primjenom Gauss-Ostrogradsky teorema formira se izraz

$$\int_{KV} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{KV} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{KV} \rho f_i dV + \int_{KV} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV$$

Iz kojeg se sažimanjem materijalnog volumena u česticu fluida dobije se zakon očuvanja količine gibanja u diferencijalnom zapisu

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

Rastavljanjem tenzora naprezanja () na sferni i devijatorski dio. Sferni dio će predstavljati sile tlaka koje djeluju na fluid (normalna naprezanja), dok devijatorski dio predstavlja tangencijalne sile u fluidu (tangencijalna naprezanja).

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji}$$

Sada je potrebno uključiti Newtonov zakon viskoznosti, odnosno konstitutivnu jednadžbu pomoću koje se tenzor tangencijalnih naprezanja, povezuje s poljem brzine.

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

U slučaju promatranja nestlačivog strujanja ili strujanja gdje neće doći do nagle promjene brzine, divergencija polja će biti jednaka nuli. Drugim riječima viskozne sile, nastale kao

posljedica promjene volumena čestice, neće imati utjecaj na režim strujanja ili formiranje, tj. Zanimaju se.

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\mu D_{ji}$$

Uzevši u obzir konstantnu viskoznost i gustoću, zakon očuvanja količine gibanja će se pisati

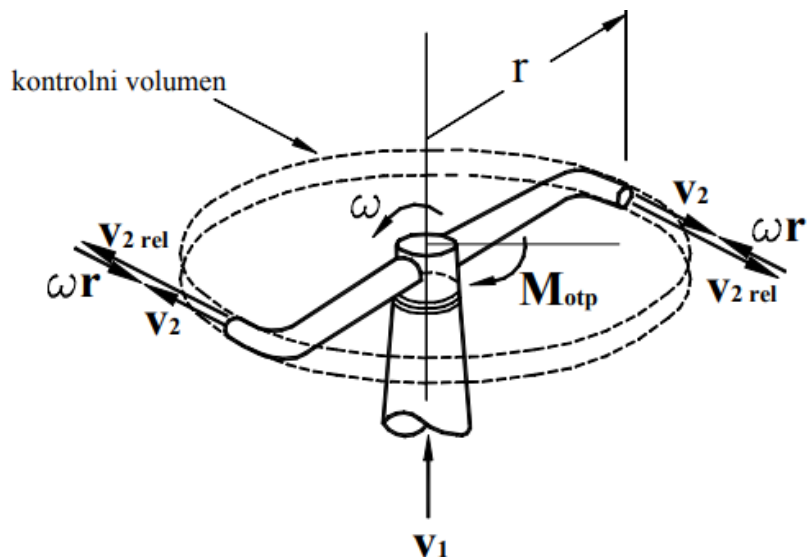
$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$$

#### 6.1.4 Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Za moment od sile  $\vec{F}$  koja djeluje na određenoj udaljenosti od točke O vrijedi  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Zakon očuvanja momenta količine gibanja dobiva se vektorskim množenjem vektora položaja  $\vec{r}$  sa zakonom očuvanja količine gibanja izraženog za kontrolni volumen:

$$\Sigma \vec{r} \times \vec{F} = \int_{KV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) dV + \int_{KP} (\rho \vec{r} \times \vec{v}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Momente prouzročene vanjskim silama predstavlja lijeva strana jednadžbe, dok promjenu momenta količine gibanja u vremenu i utok istih kroz granicu kontrolnog volumena predstavlja desna strana jednadžbe. Navedeni izraz se često koristi u analizi turbostrojeva, radi veće važnosti momenta od samih sila. U slučaju stacionarnog strujanja u navedenom izrazu se lijevi član s desne strane jednadžbe gubi.



Slika 12. Primjena zakona očuvanja momenata količine gibanja ( raspršivač vode ) [1]

### 6.1.5 Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije za kontrolni volumen izražen je u sljedećem obliku

$$\frac{dE}{dt} = \int_{KV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_{KP} \rho e (\vec{v}\vec{n}) dS$$

prvi zakon termodinamike govori da je promjena energije sustava jednaka toplini koja je dodana sustavu. Rad predan sustavu u vremenu se može rastaviti na sljedeći način

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_p$$

Gdje je  $\dot{W}_p$  izražen kao

$$\dot{W}_p = \int_{S_t} \rho \vec{v}\vec{n} dS$$

Što je zapravo rad stvoren od tlačnih sila na pomičnoj granici u vremenu, dok  $\dot{W}_s$  predstavlja rad tangencijalnih sila predan sustavu u vremenu. Izraz se može pisati:

$$\dot{Q}_H + \dot{W}_s = \int_{KV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_{KP} \rho \left( \frac{P}{\rho} + e \right) (\vec{v}\vec{n}) dS$$

$e$  predstavlja apsolutnu energiju po jedinici mase, odnosno ona je zborj unutarnje, kinetičke i potencijalne energije po jedinici mase. Zapisuje se u obliku

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz$$

primjenom jednadžbe zakona očuvanja energije na stacionarno strujanje kroz kontrolni volumen koji ima jedan utok i istok jednadžba se može zapisati kao

$$\dot{m} \left[ u_2 - u_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \right] = \dot{Q}_H + \dot{W}_s$$

podjeli li se jednadžba sa masenim protokom  $\dot{m}$  (uz to da je gubitak raspoložive energije sustava jednak  $u_2 - u_1 - q_H$ ) i konstantnom gravitacijom proizlazi sljedeći izraz

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_g + h_s$$

što je zapravo jednadžba mehaničke energije koju radi sličnosti s Bernoullijevom jednadžbom još nazivamo proširena Bernoullijeva jednadžba [N/m=m].  $h_g$  predstavlja sve gubitke. U slučaju kada se unutar kontrolnog volumena nalazi turbina vrijedi

$$h_s = -h_T$$

gdje  $h_T$  predstavlja pad piezometrične visine, dok u slučaju ako se unutar kontrolnog volumena nalazi pumpa tada je

$$h_s = h_p$$

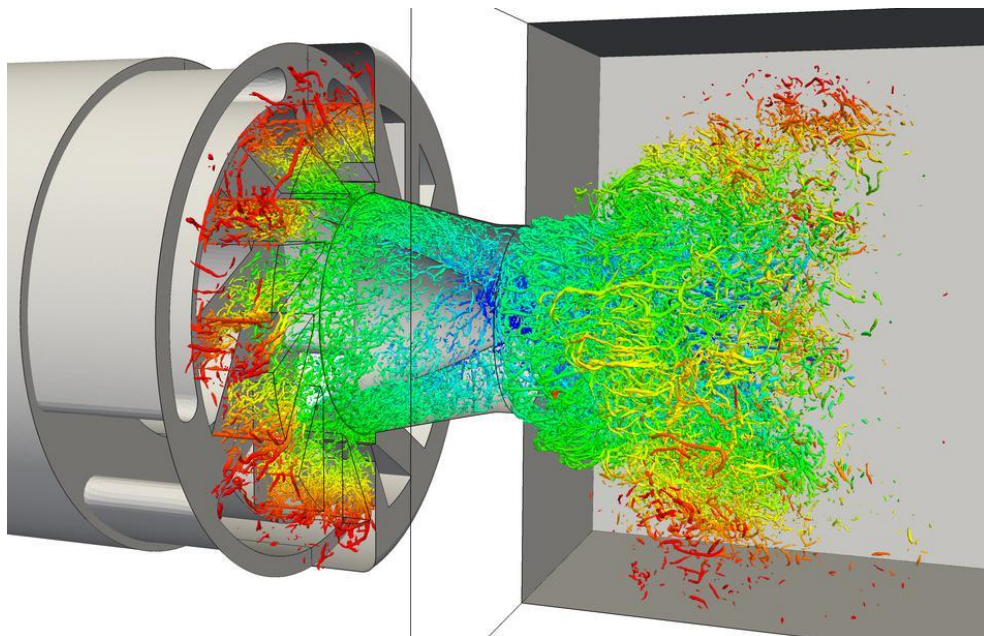
gdje  $h_p$  predstavlja dobavnu visinu pumpe. Zbog prisustva rotacijskih strojeva dolazi do

nestacionarnog strujanja, stoga ga je potrebno smatrati kao lokalno nestacionarno strujanje kako bi se zadovoljila pretpostavka o stacionarnom strujanju u kontrolnom volumenu.

## 6.2 Modeliranje turbulencije

### 6.2.1 Direct Numerical Simulation (DNS)

Direct numerical simulation ili DNS je potpuno rješavanje, u trodimenzionalnom prostoru uz vremensku ovisnost, jednadžbi očuvanja i Navier Stokesovih jednadžbi. Direktno rješavanje poput ovog je proračunski vrlo zahtjevno, te će se u budućnosti razvojem paralelnih računala i memorije povećati njegova upotreba, no trenutno nije u inženjerskoj praksi za rješavanje općenitih inženjerskih problema.

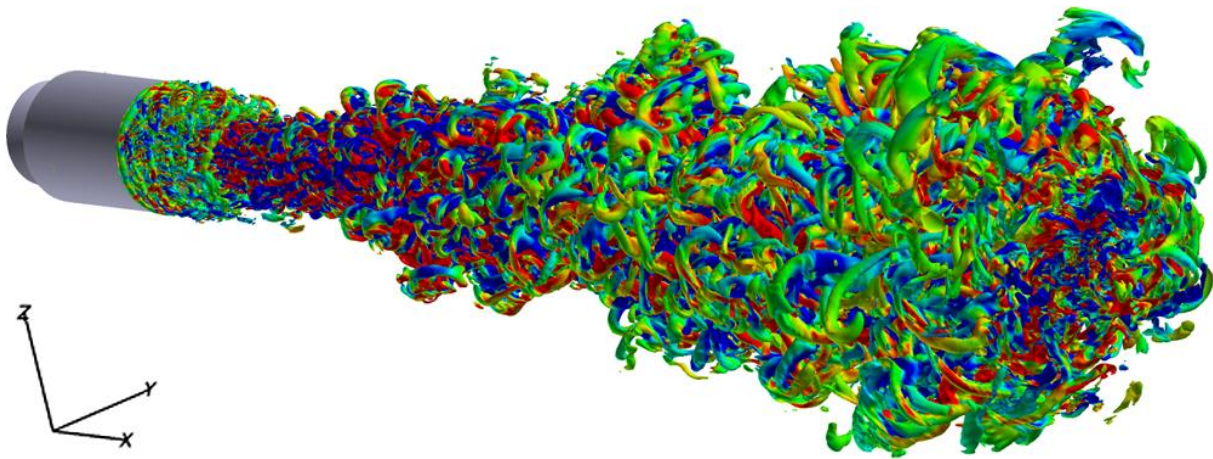


Slika 13. Direktna numerička simulacija turbulentnog izgaranja [9]

### 6.2.2 Large Eddy Simulation (LES)

U prijevodu modeliranje velikih vrtloga objašnjavamo kao pristup u koje se rješava problematika velikih i malih vrtloga. Za velike vrtloge koristi se numerički proračun zbog pretpostavke da su izravno povezani numeričkim rubnim uvjetima i uz to nose većinu Reynoldsovih napreznja. Dok će se mali vrtlozi matematički modelirati zbog izotropnosti, uz to nemaju velik značaj na Reynoldosva napreznja. Upravo zbog matematičkog modeliranja

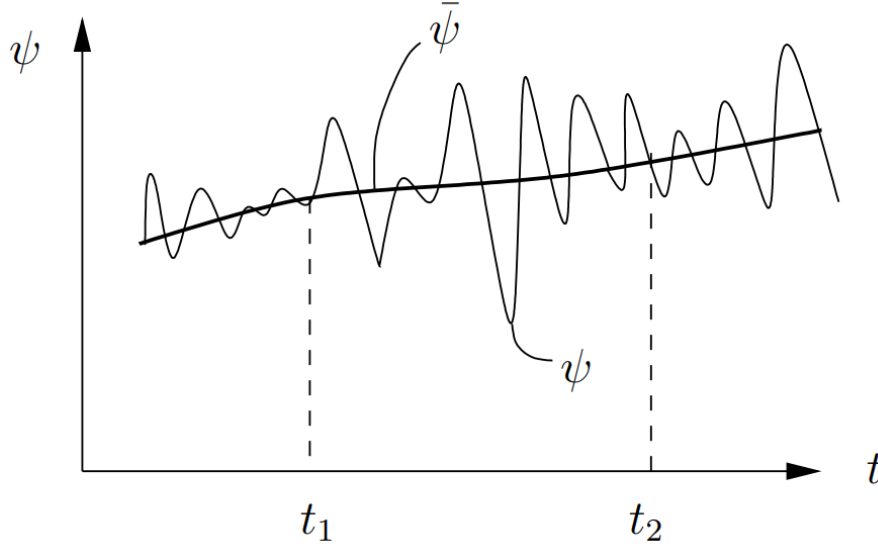
malih vrtloga u LES-u nije potrebna toliko napredna numerička mreža, samim time se smanjuje napor računala.



Slika 14. Simulacija velikih vrtloga mlaznog motora [10]

### 6.2.3 RANS

Fizikalnu veličinu  $\psi$  određuje se zbrojem vremenski prosječne vrijednosti  $\bar{\psi}$  i oscilirajućeg dijela  $\psi'$ , odnosno  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ . Mijenjanje vrijednosti fizikalne veličine  $\psi$  u turbulentnom strujanju prikazano je na sljedećoj slici.



Slika 15. Fizikalna veličina  $\psi$  u strujanju [8]

Vremenski osrednjena vrijednost veličine  $\psi$  određuje se:

$$\bar{\psi}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_2} \psi(x_i, t) dt, \text{ gdje je } T_0 = (t_2 - t_1)$$

Period  $T_0$  mora biti odabran tako da osrednjena vrijednost srednje veličine bude

jednaka srednjoj veličini  $\bar{\psi} = \bar{\bar{\psi}}$ . Uz to je neophodno da vremenski osrednjena vrijednost oscilirajućeg dijela bude jednaka nuli, tj.  $\bar{\psi'} = 0$ . Označavanjem neke druge fizikalne veličine sa  $\xi$ , dolazi se do sljedećih izraza:

$$\frac{d\bar{\psi}}{dx_i} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_i}, \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}, \quad \overline{\bar{\psi} \cdot \xi'} = 0, \quad \overline{\bar{\psi} \cdot \xi} = \bar{\psi} \cdot \bar{\xi}, \quad \overline{\psi \cdot \xi} = \bar{\psi} \cdot \bar{\xi} + \overline{\psi' \cdot \xi'}$$

primjena prethodno navedenog izraza na zakon očuvanja količine gibanja za fluid konstantne gustoće i viskoznosti i diferencijalnu jednadžbu kontinuiteta kod nestlačivog strujanja, rezultira Navier-Stokesovim jednadžbama osrednjenim Reynoldsovim osrednjavanjem:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} \right]$$

u prethodnoj jednadžbi javlja se član  $\overline{v'_i v'_j}$  koji je dvojna korelacija nastala kao posljedica Reynoldsovog osrednjavanja. Taj član predstavlja novu nepoznicu što znači da ga je potrebno modelirati ili za njega definirati jednadžbu. Definiranjem jednadžbe za član  $\overline{v'_i v'_j}$  javiti će se trojna korelacija koja je sustav jednadžbi koje se nemogu zatvoriti, te se upravo iz tog razloga oslanja na modeliranje iako takav pristup nije precizan zbog gubitka dijela informacija.

Član  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  se naziva i Reynoldsova ili turbulentna naprežanja

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \begin{matrix} -\rho \overline{v'_1 v'_1} & -\rho \overline{v'_1 v'_2} & -\rho \overline{v'_1 v'_3} \\ -\rho \overline{v'_2 v'_1} & -\rho \overline{v'_2 v'_2} & -\rho \overline{v'_2 v'_3} \\ \text{sim} & & -\rho \overline{v'_3 v'_3} \end{matrix}$$

Uvodi se izraz turbulentne viskoznosti  $\mu_t$  kao posljedica režima strujanja.

Zadatak modela turbulencije u principu svodi se na izjednačavanju nepoznanica i jednadžbi do određene korelacije a da se pri tome ne izgubi jednostavnost, ekonomičnost, točnost.

#### 6.2.4 Algebarski modeli

Ovakvi modeli se koriste na jednostavnijim turbulentnim strujanjima, te daju bolje rezultate od modela s jednom ili više jednadžbi. Takva strujanja možemo podijeliti u dvije skupine: slobodna turbulencija u koju spadaju strujanja u vrtložnom tragu, mlazu ili miješajućem sloju, dok u zidnu turbulenciju spada strujanje uzduž čvrste stijenke. Korištenjem modela turbulencije koji se temelji na Prandtlovoj teoriji duljine miješanja, značenje koeficijenta modela i puta miješanja će biti drukčiji, te će ih se određivati pomoću eksperimentalnih istraživanja, stoga će model moći dobro odrediti željene u sličnim strujanjima. Danas se preferira uporaba algebarskih modela za proračun stacionarnog strujanja radi jeftine primjene, uz točne rezultate raspodjele tlaka i smičnih naprežanja u odnosu na eksperimentalne rezultate.

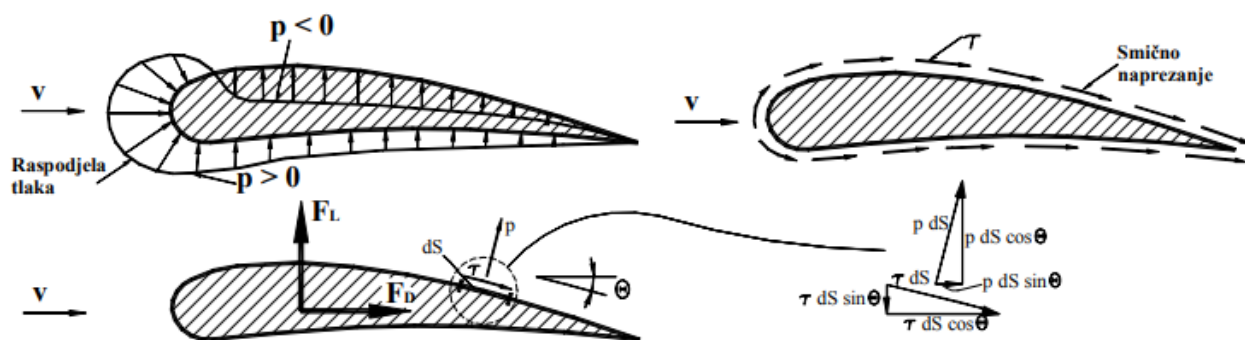


## 6.2.5 Teorija kaosa

Teorija kaosa kao novija grana fizike pokriva i ponašanje nelinearnih dinamičkih sustava i njihovu osjetljivost na rubne uvijete. Takvim se sustavom smatra i strujanje realnog fluida koji se modelira putem Navier Stokes jednadžba. S obzirom da Navier Stokesove jednadžbe obuhvaćaju kaotično gibanje, konačna rješenja značajno ovise o početnim uvjetima. Zahvaljujući teoriji kaosa moguće je dobiti uvid u kompleksnost turbulencije, bez obzira njenu stagnaciju u početku 21. stoljeća.

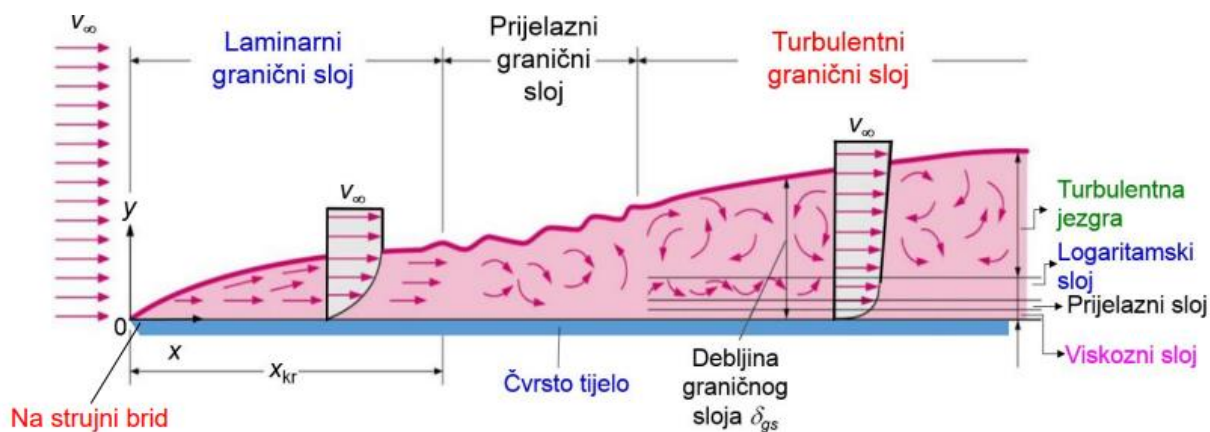
## 7. Strujanje u graničnom sloju

Gibanjem fluida oko tijela ili tijela kroz fluid nastaju normalna  $p$  i tangencijalna  $\tau$  naprezanja na stijenku tijela. Ukupnu silu fluida koja djeluje na tijelo moguće je rastaviti na dvije komponente, silu otpora  $F_D$  („drag“) i dinamički uzgon  $F_L$  („lift“). Sila otpora je komponenta paralelna brzini  $v$  nastrojavanja prema tijelu, dok je dinamički uzgon njena okomica. U obje komponente su prisutna normalna i smična naprezanja.



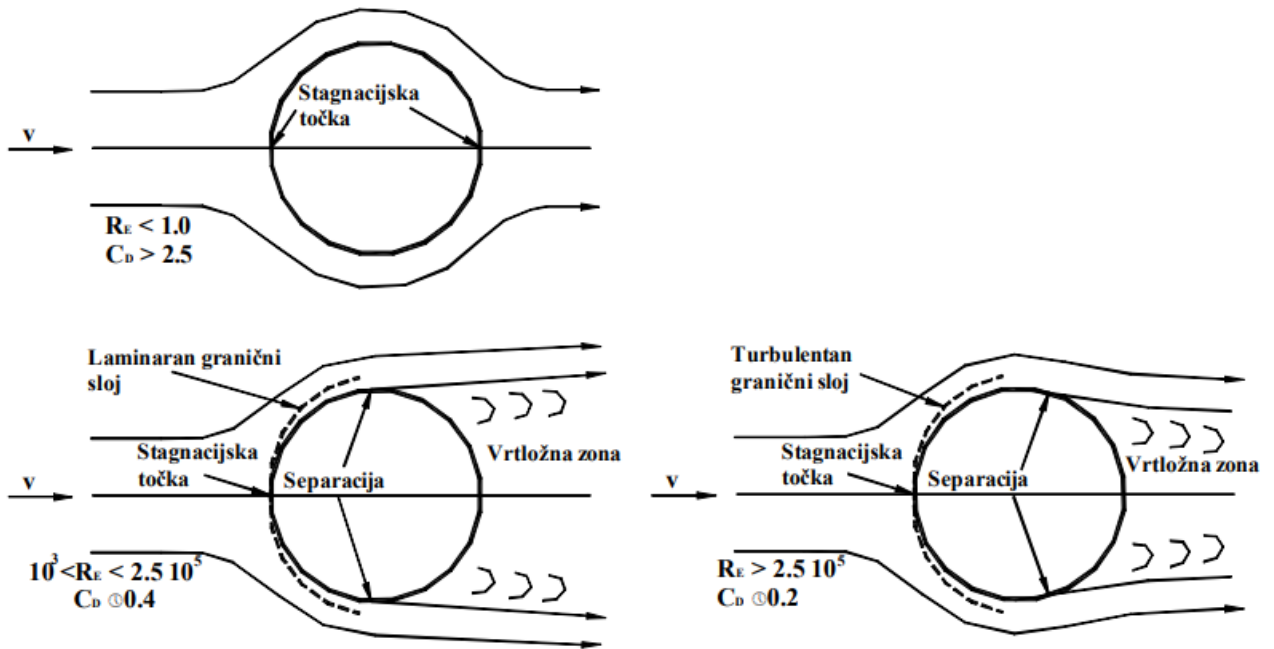
Slika 16. Djelovanje viskoznih i tlačnih sila na avionsko krilo [1]

Pojam graničnog sloja se definira kao dio struje fluida pod utjecajem posmičnih sila. Granični sloj ima značaj utjecaj na intenzitet sile otpora i dinamičkog uzgona. U slučaju nastrojavanja fluida uzduž glatke stijenke tijela granični sloj je laminaran, zatim dolazi do debljanja sloja sve do trenutka kada strujanje u njemu postaje u nestabilno, te dolazi do konačne transformacije u turbulentan granični sloj.



Slika 17. Prikaz graničnog sloja [5]

Granični sloj ovisi o gradijentu tlaka, prema tome u slučaju pada tlaka granični sloj će se stanjivati, dok će se u slučaju povećanja tlaka naglo debljati. Odvajanje graničnog sloja od stijenke tijela dolazi kada se povećava tlak u smjeru strujanja dok se posmičnim naprezanjima smanjuje količina gibanja u graničnom sloju. U trenutku daljnjeg porasta tlaka nizvodno od točke separacije događa se prostrujavanje u vrtložnoj zoni („wake“). Naravno efekt separacije ovisi o obliku tijela na koji fluid nastrojava, odnosno hidrodinamična tijela će reducirati efekte separacije, dok nehidrodinamična tijela izazivaju jaku silu otpora radi niskog tlaka u vrtložnoj zoni. Mjesto pojave separacije znatno ovisi o režimu strujanja u graničnom sloju. Za razliku od laminarnog velika izmjena količine gibanja u turbulentnom graničnom sloju, stvara dužu slijepljenost sloja uz stijenku tijela, drugim riječima uzrokuje kasniju točku separacije. Što se može vidjeti na slici(18).



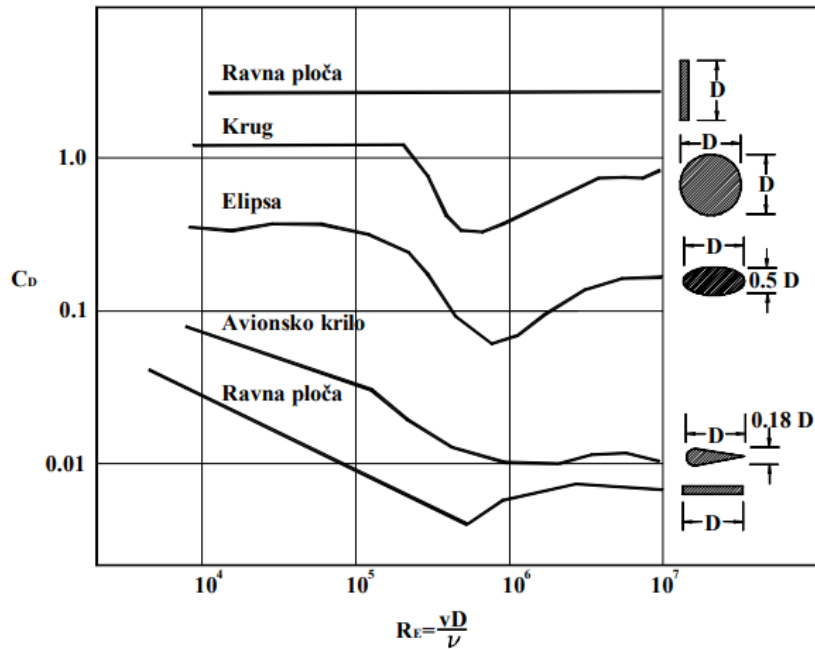
Slika 18. Nastrujavanje fluida na kuglu [1]

Za proračunavanje sile otpora  $F_D$  i sile dinamičkog uzgona  $F_L$ , potrebno je eksperimentalno ili numerički odrediti koeficijente sile otpora  $C_D$  i dinamičkog uzgona  $C_L$ .

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 A,$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho v^2 A$$

Gdje  $A$  predstavlja karakterističnu površinu tijela, što obično bude projekcija tijela na ravninu koja je okomita na vektor brzine nastrujavanja.



Slika 19. Koeficijent otpora strujanja za više likova različitih geometrija [1]

Za brojeve  $C_D$  i  $C_L$  vrijedi

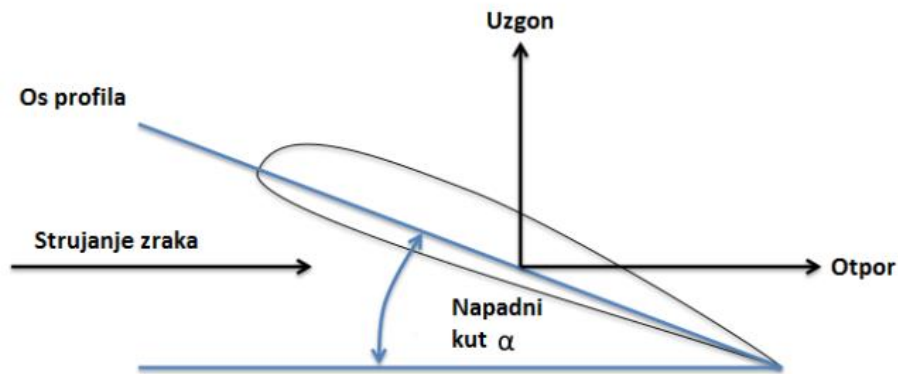
$$C_D = f(\text{oblika}, \text{kuta nastrujavanja}, Re, Ma, Fr, e/D)$$

Dakle, tijela različitih dimenzija mogu imati istu silu otpora. Veličina Reynoldsovog broja igra važnu ulogu u analizi utjecaja oblika na koeficijent otpora  $C_D$ . Pri velikim  $Re$  brojevima hidrodinamičnost tijela znatno reducira silu otpora, dok se kod umjerenih vrijednosti koeficijent otpora  $C_D$  blago smanjuje s povećanje Reynoldsovog broja. Na nimalo hidrodinamičnim tijelima poput ravne ploče okomite na smjer nastrujavanja fluida, točka separacije će biti na rubu ploče, nebitno o kojem je režimu strujanja riječ. Dakle, koeficijent otpora je vrlo malo ovisan o Reynoldsovom broju.

Kada se govori o hrapavosti površine, ona povećava koeficijent i silu otpora kod hidrodinamički tijela, dok je povećanje površinske hrapavosti kod nehidrodinamičkih tijela poput kugle valjka itd., dobrodošlo zbog mogućnosti smanjenja sile i koeficijenta otpora. Hrapavošću površine se postiže raniji prelazak u turbulentni režim strujanja. Pri konstruiranju tijela kod kojih sila dinamičkog uzgona igra važnu ulogu, potrebno je dobiti što manju silu otpora  $F_D$  a istovremenu što veću silu uzgona  $F_L$ .

Također od velike važnosti je i kut vektora brzine nastrujavanja. Nastrujavanje pod kutem od  $0^\circ$  na asimetrično avionsko krilo pojaviti će se sila dinamičkog uzgona, dok simetrično

avionsko krilo uz kut nastrujavanja  $0^{\circ}$  neće stvarati silu dinamičkog uzgona, dok ne poveća kut nastrujavanja. Povećanjem kuta nastrujavanja će se i obrnuti gradijent tlaka na gornjoj površini povećati, dok će se točka separacije pomaknuti nizvodno. Dolazi do razvijanja maksimalne sile dinamičkog uzgona, sve do trenutka zastoja odnosno trenutka kada se kut toliko povećao da je uzrokovao nagli pad dinamičkog uzgona i povećanje sile otpora.



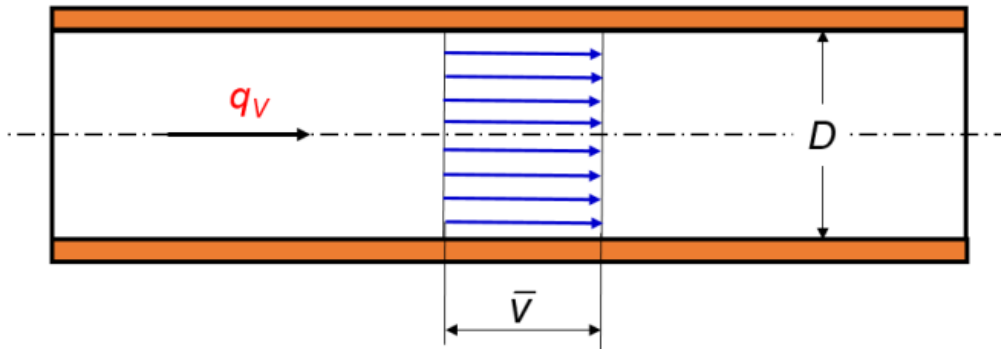
Slika 20. Odnos sile otpora i uzgona pri napadnom kutu [12]

## 8. Gubici strujanja u cjevovodima

Strujanje u cjevovodima pod tlakom ima veliko značenje u tehnici kod transporta fluida poput vode, plinova, zraka, nafte itd. za opskrbljivanje ili energetska iskorištavanje poput grijanja, hlađenja i pokretanja određenih strojeva. Strujanjem realne tekućine pod tlakom kroz cjevovode nailazi uzduž kontaktne površine sa stijenkama cijevi na otpore trenja. U slučaju strujanja idealne tekućine kroz protočnu cijev, brzina tekućine će u svim točkama presjeka biti jednaka, te se volumni protok može definirati jednadžbom kontinuiteta

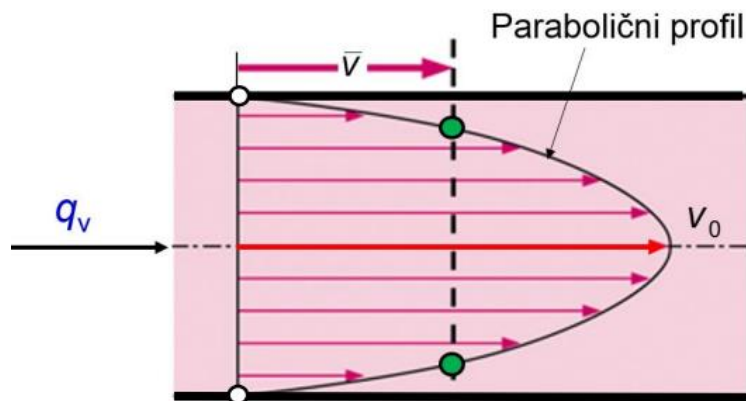
$$q_v = \bar{v} \cdot A = \bar{v} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Takvo neviskozno strujanje bez vrtloga se naziva potencijalno strujanje. Profil brzine kod idealnog potencijalnog strujanja se može vidjeti na idućoj slici (21)



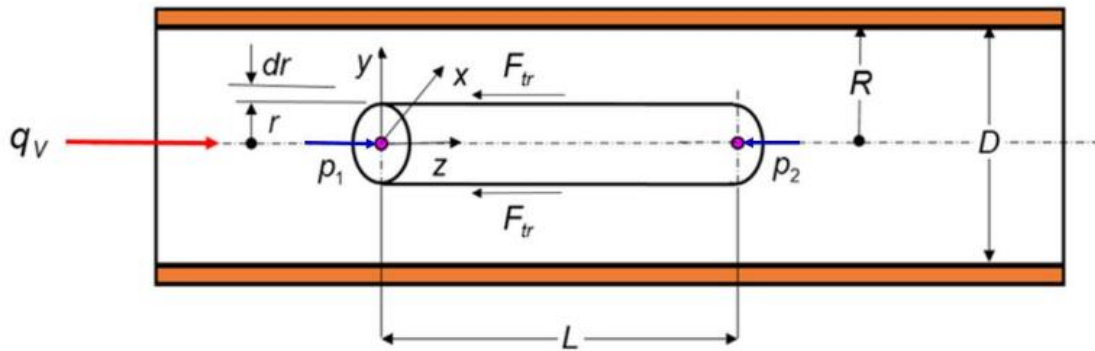
Slika 21. Profil brzine idealnog potencijalnog strujanja u cijevi [5]

Dok u slučaju strujanja realne tekućine kroz protočnu cijev će se najveća brzina strujanja tekućine nalaziti u sredini cijevi, te se prema krajevima smanjuje do područja uz samu stijenku gdje je brzina jednaka nuli. Nailaskom na zapreku tijekom strujanja realne tekućine, čvrsto tijelo stvara granični sloj tekućine čija se brzina razlikuje od brzine tekućine udaljene od tog tijela.



Slika 22. Profil brzine laminarnog strujanja [5]

Glavni razlog promjene energije kod slojevitog laminarnog strujanja je viskozno trenje između čestica tekućina i stijenke cijevi i čestica tekućina međusobno. Čestice tekućina uz stijenku cijevi se jedva gibaju, dok se malo dalje brzina čestica povećava do trenutka kada dosegnu brzinu koju bi imale u slučaju da stijenka ne postoji.



Slika 23. Hagen-Poiseuilleov zakon laminarnog strujanja [5]

Djelovanje sile na sloj tekućine oblika valjka nastaje zbog razlike tlakova, te se može izraziti

$$F = r^2 \pi \cdot (P_1 - P_2)$$

Sila trenja pomoću koje sloj tekućine utječe na susjedni sloj iznosi

$$F_{tr} = \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dv}{dr}$$

Zbroj navedenih sila u stanju ravnoteže sila je 0

$$\sum F_i = F + F_{tr} = 0$$

Odakle slijedi

$$r^2 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2) = -\mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dv}{dr}$$

To jest

$$(p_1 - p_2) \cdot r \cdot dr = -\mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dv$$

Čijom se integracijom dobije

$$\int_0^R (p_1 - p_2) \cdot r \cdot dr = - \int_v^0 \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot dv$$

Izraz za brzinu realne tekućine kod laminarnog strujanja je

$$v = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \mu \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4 \cdot \mu \cdot L} \cdot (R^2 - r^2)$$

Volumen tekućine je definiran kao

$$v = \int_v dV = \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot v \cdot t$$

Odnosno

$$v = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot t}{2 \cdot \mu \cdot L} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot dr$$

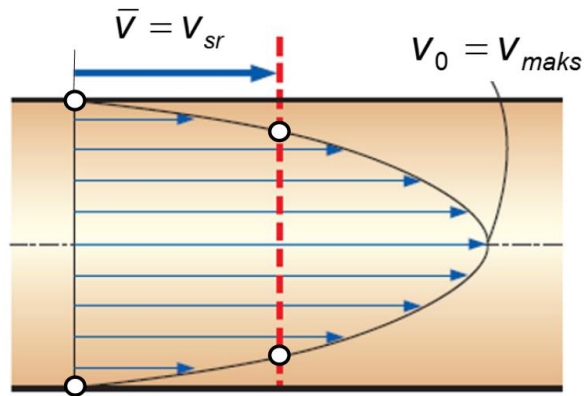
Dok se jednadžba volumnog protoka piše kao

$$q_v = \frac{v}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{\mu \cdot L} \cdot R^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\Delta p}{\mu \cdot L} \cdot R^2$$

Uzimajući u obzir da je srednja brzina pri laminarnom strujanju u cijevi

$$\bar{v} = v_{sr} = \frac{1}{\pi \cdot R^2} \cdot \int_0^R v_z(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{v_0}{2}$$





Slika 24. Srednja brzina fluida laminarnog strujanja [5]

Dobije se izraz razlike tlaka s prosječnom brzinom tekućine

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{8 \cdot \mu \cdot L}{R^2} \cdot \bar{v}$$

Razliku tlaka se može izraziti i sa volumnim protokom, što je

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{8 \cdot \mu \cdot L}{R^4} \cdot q_v$$

Upravo dobiveni izraz je Hagen-Poiseuilleov zakon laminarnog strujanja realne tekućine kroz protočnu cijev, te govori kako volumni protok ovisi o gradijentu tlaka, dinamičkoj viskoznosti i polumjera protočne cijevi na četvrtoj potenciji.

Otpor protjecanja realne tekućine zbog viskoznog trenja nazivamo hidraulički otpor. Korištenjem Hagen-Poiseuilleovog zakona moguće je odrediti izraz otpora kod strujanja viskozne realne tekućine u laminarnom režimu. Zbog razlike tlakova sila trenja je jednaka ukupnoj sili

$$F_{tr} = R^2 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2) = \frac{8 \cdot \mu \cdot L}{R^2} \cdot q_v$$

Upotrebom jednadžbe kontinuiteta

$$q_v = \bar{v}A = \bar{v} \cdot R^2 \cdot \pi$$

To jest sila trenja je

$$F_{tr} = 8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot \bar{v}$$

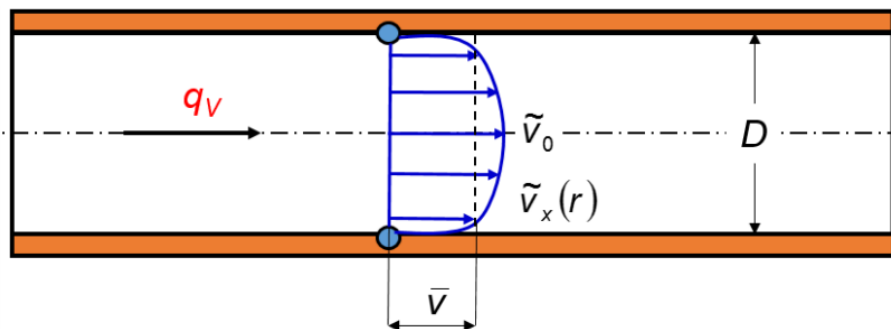
Dobiveni izraz je Poiseuilleova formula otpora za strujanje viskozne tekućine u laminarnom režimu kroz horizontalnu cijev. Korištenjem izraza Reynoldsovog broja za protok tekućine u okrugloj cijevi

$$Re = \frac{\bar{v} \cdot D}{\nu} = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot D}{\mu}$$

Razlika tlaka će biti

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot \bar{v}^2}{\mu}$$

Dakle, otpor tekućine tijekom strujanja tekućine kroz ili oko čvrstog tijela je ovisan o viskoznosti i gustoći tekućine, položaju i obliku čvrstog tijela i hrapavosti površine tijela, a odgovara površini tijela okomitoj na smjer gibanja. Dok je otpor strujanja plinova kod relativno malih brzina proporcionalan brzini, a pri velikim brzinama kvadratu brzine.

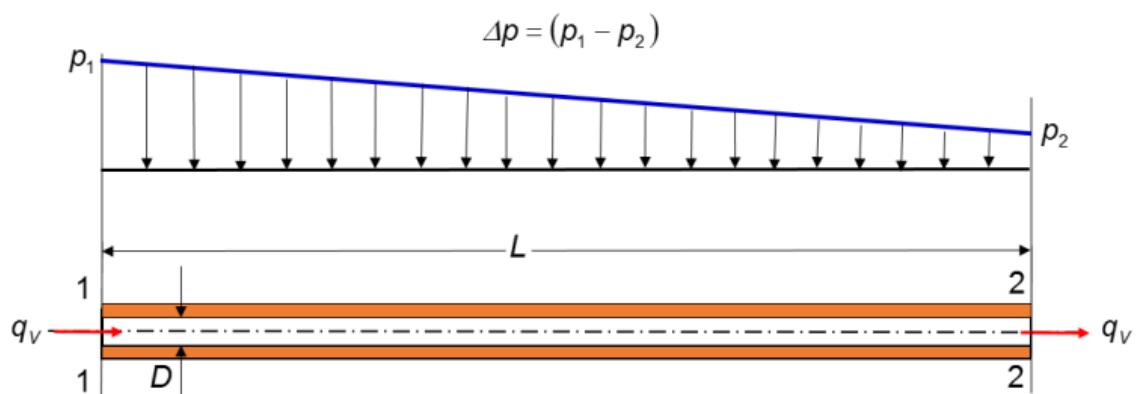


Slika 25. Profil brzine turbulentnog strujanja u cijevi [5]

Tijekom procjene pada tlaka u turbulentnom strujanju treba se uzeti u obzir i turbulentni

doprinos toku količine gibanja. Dimenzijskom analizom dobivena je bezdimenzijska korelacijska jednačba i kriteriji sličnosti. Izvodi se Darcy-Weisbachova jednačba za proračun pada tlaka u protočnoj cijevi

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \bar{v}_{sr}^2$$

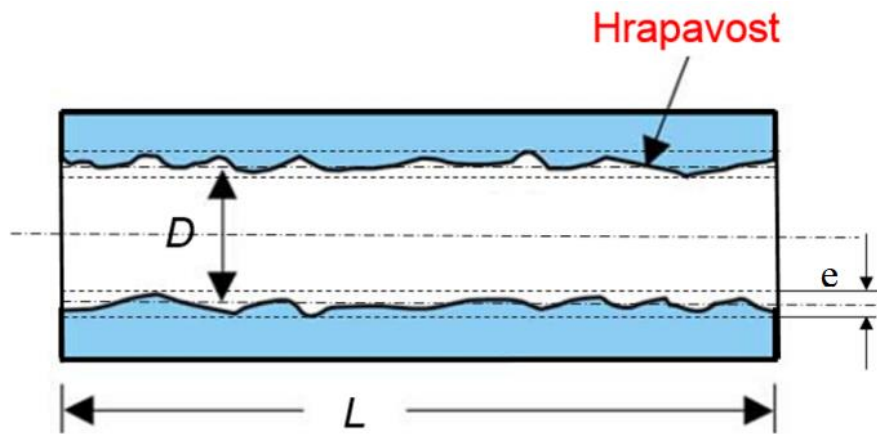


Slika 26. Pad tlaka u protočnoj cijevi [5]

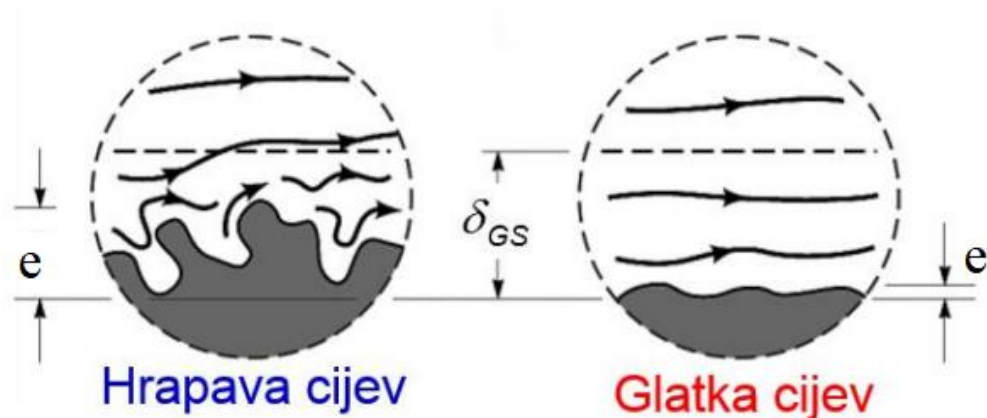
Pri laminarnom režimu strujanja mogu vrijediti oba zakona, prema tome izjednačavanjem oba zakona dobije se

$$\frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot \bar{v}^2}{2} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \bar{v}^2 \Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$$

Gdje  $\lambda$  predstavlja koeficijent trenja u cijevi. Pri proračunu gubitaka raspoznavamo dva parametra hrapavosti. Apsolutna hrapavost  $e$  izraženu u mm i bezdimenzijsku relativnu hrapavost koja je omjer apsolutne hrapavosti i promjera protočne cijevi  $e / D$ .



Slika 27. Hrapavost protočne cijevi [5]



Slika 28. Razlika strujanja pri hrapavoj i glatkoj cijevi [5]

U laminarnom režimu strujanja koeficijent trenja  $\lambda$  je ovisan samo o Reynoldsovom broju

$$\lambda = f(Re) = f\left(\frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot D}{\mu}\right) = \frac{64}{Re} \Rightarrow Re \leq 2300$$

Dok pri turbulentnom strujanju  $\lambda$  ovisi Reynoldsovom broju i relativnoj hrapavosti  $e / D$

$$\lambda = f\left(Re, \frac{e}{D}\right) = f\left(\frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$$

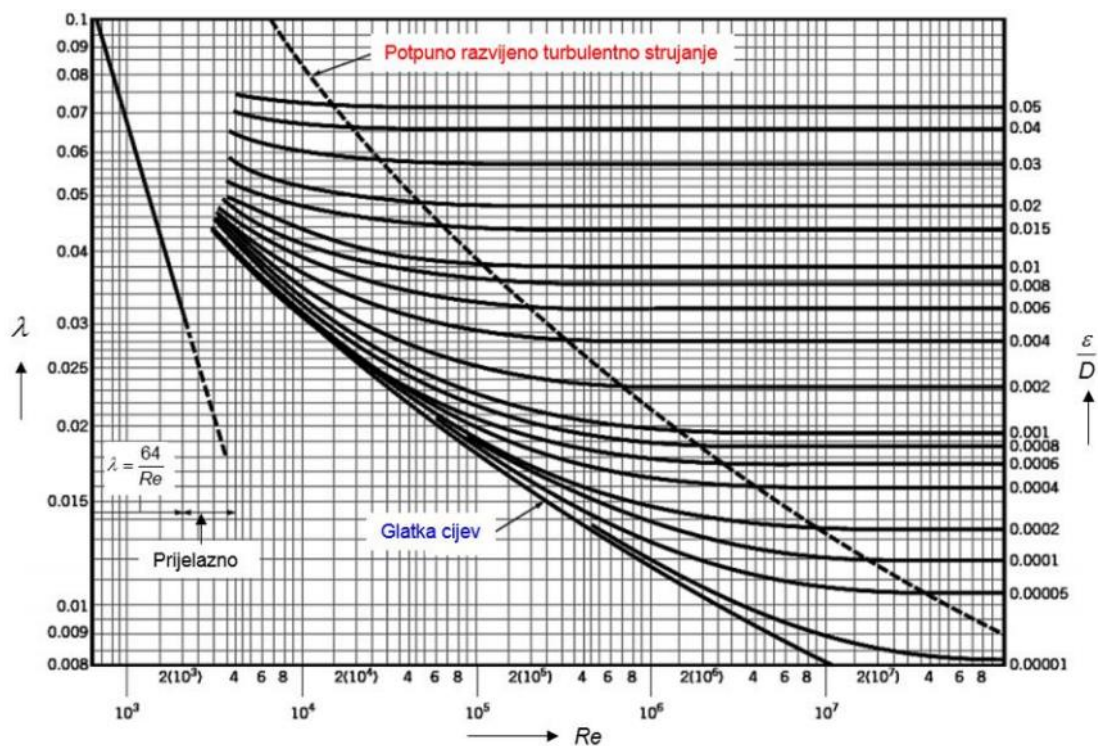
U slučaju jako razvijenom turbulentnom strujanju  $\lambda$  će ovisiti samo o relativnoj hrapavosti stijenke cijevi

$$\lambda = f\left(\frac{e}{D}\right)$$

U praksi se koriste cijevi koje su obično hrapave. Pomoću empirijskih relacija dobivenih eksperimentalno je opisano turbulentno strujanje u hrapavim cijevima s koeficijentom otpora. Veliku značajnost u praksi ima Colebrookova interpolacijska formula koja uspješno pokriva područja glatkih i hrapavih cijevi, no da bi se izračunao koeficijent trenja potrebno ju je računati iterativnim putem.,

$$\frac{7}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{e}{3,7D} + \frac{2,512}{Re \sqrt{\lambda}}\right) = -0,86859 \cdot \ln\left(0,2698 \cdot \frac{e}{D} + \frac{2,512}{Re \sqrt{\lambda}}\right)$$

$\lambda$  se očituje iz posebnog dijagrama koji se zove Moodyev dijagram



Slika 29. Moodyev dijagram [5]

U praksi se za određivanje  $\lambda$  koristi i Swamee-Jaine eksplicitna jednačba oblika

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[ \ln \left( \frac{e}{3,7 \cdot D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} = \frac{0,25}{\left[ \log \left( \frac{e}{3,7 \cdot D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$$

## 9. Hidraulički proračun cjevovoda

Gubici  $h_g$  se mogu kategorizirati na linijske (dužinske, glavne)  $h_{lin}$  i lokalne  $h_{lok}$ , drugim riječima, visina gubitaka mehaničke energije je  $h_g = h_{lin} + h_{lok}$ . Linijski gubici u principu nastaju zbog trenja, te su ekvivalentni sa dužinom cijevi, približno jednaki kvadratu brzine i obrnuto proporcionalni unutarnjem promjeru cijevi, uz to ovise o gustoći, viskoznosti i površinskoj hrapavosti stijenke cijevi. Modeliranje linijskih gubitaka  $h_{lin}$  izvodi se pomoću Darcy-Weisbachove formule

$$h_{lin} = \frac{\Delta p_{lin}}{\rho g} = \lambda \frac{L v^2}{D 2g} = \lambda \frac{8LQ^2}{\pi^2 D^5 g}$$

Gdje  $\lambda$  predstavlja koeficijent hrapavosti, L duljinu cjevovoda, D promjer cjevovoda, Q protok i v srednju brzinu tečenja fluida. Faktor trenja  $\lambda$  određuje se pomoću njegove ovisnosti o režimu strujanja (Re) ili kvaliteti cjevovoda ( $k/D$  relativna hrapavost) uz pomoć Moodyjevog dijagrama tj.  $\lambda = F(Re, k/D)$ , osim toga  $\lambda$  se određuje i sa analitičkim izrazima. Analitičko rješenje za faktor trenja laminarnog strujanja je

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \text{ za } Re < 2300$$

Gdje je očito da u laminarnom strujanju faktor trenja ne ovisi o hrapavosti stijenke cijevi. Dok u području turbulentnog strujanja vrijedi  $\lambda = \lambda(Re, e/D)$ , te se koristi Colebrookova formula smatrana kao najtočnijom, koja glasi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86859 \cdot \ln \left( 0,2698 \frac{k}{D} + \frac{2,5119}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

Iz koje se iterativnim postupkom može odrediti faktor trenja, što nije praktično, pa se koristi dovoljno točna eksplicitna formula Swamee-Jaine, koja je primjenjiva za gotovo cijelo

područje Moodyevog dijagrama uz  $Re < 5000$ , te glasi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1.325}{\left[ \ln\left(\frac{k}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right) \right]^2}$$

Navedeni izraz vrijedi i za hidraulički glatke cijevi ( $k/D=0$ ) i za područje potpune turbulencije ( $Re=\infty$ ). Za vrlo hrapave cjevovode  $\lambda=\lambda(\epsilon/D)$  vrijedi von Karmanov izraz

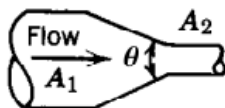
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 - 0,869 \cdot \ln \frac{k}{D}$$

Za hidraulički glatke cijevi  $\lambda=\lambda(Re)$  koristi se Blasiusova ili Karman-prandtllova formula

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log(Re \sqrt{x}) - 0,8$$

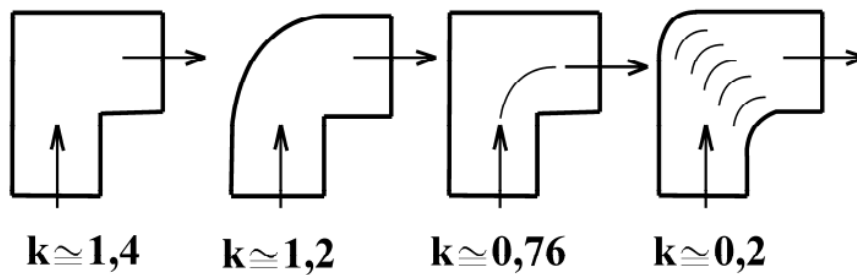
Lokalni gubici s druge strane nastaju radi razdvajanja strujanja od stijenke i pojave „mrtvih zona“ unutar kojih se fluid vrtloži i crpi energiju glavne struje. Mogu se podijeliti na lokalne gubitke pri promjeni presjeka struje fluida što su sapnice, nagla proširenja i suženja, difuzor, itd. Te lokalne gubitke pri promjeni smjera strujanja fluida koji nastaju zbog koljena (nagla promjena smjera) i luka (blaga promjena smjera).

$A_2/A_1$	Kut $\theta$						
	10	15–40	50–60	90	120	150	180
0.50	0.05	0.05	0.06	0.12	0.18	0.24	0.26
0.25	0.05	0.04	0.07	0.17	0.27	0.35	0.41
0.10	0.05	0.05	0.08	0.19	0.29	0.37	0.43



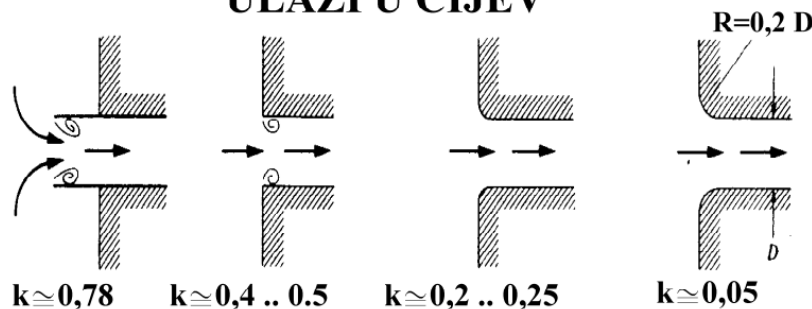
Slika 30. Lokalni gubici postupnog suženja u cijevi [1]

## KOLJENA



Slika 31. Lokalni gubici kod koljena [1]

## ULAZI U CIJEV



**\*Pri obrnutom smjeru strujanja, tj. pri strujanju iz cijevi u spremnik uzima se  $k \approx 1$**

Slika 32. Lokalni gubici pri ulasku fluida u cijev [1]

Postoje i lokalni otpori koji objedinjuju obje vrste lokalnih gubitaka te nastaju uslijed promjene presjeka i smjera. Izraz koji služi za proračun većine lokalnih gubitaka je

$$h_{lok} = K \frac{v^2}{2g} = K \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g}$$

Gdje  $K$  predstavlja koeficijent lokalnog gubitka i određuje se eksperimentalno.

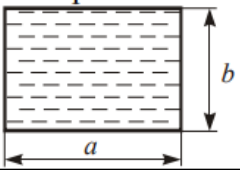
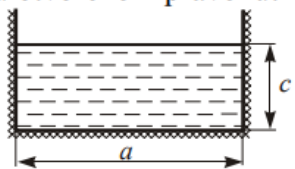
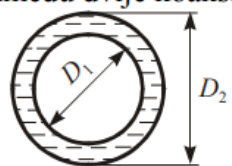
### 9.1 Proračun cjevovoda nekružnog poprečnog presjeka

Postupak hidrauličkog proračuna cijevi nekružnog poprečnog presjeka se rješava pomoću proračuna cijevi kružnog poprečnog presjeka, tako da se proračun temelji na ekvivalentnom promjeru  $D_e$ , u slučaju turbulentnog strujanja. Ekvivalentni promjer se definira



$$D_e = 4R_H = 4 \frac{S_T}{O}$$

Gdje  $S_T$  predstavlja površinu poprečnog presjeka toka, a  $O$  opseg (dužina linije dodira stijenke sa fluidom), omjer površine poprečnog presjeka i opsega naziva se hidraulički radijus  $R_H$ . Nadalje su prikazani ekvivalentni promjeri u nekim tipičnim situacijama strujanja.

Slučaj strujanja	Ekvivalentni promjer
Strujanje punim pravokutnim presjekom 	$D_e = \frac{2ab}{a+b}$
Strujanje u otvorenom pravokutnom kanalu 	$D_e = \frac{4ac}{a+2c}$
Strujanje između dvije koaksijalne cijevi 	$D_e = D_2 - D_1$

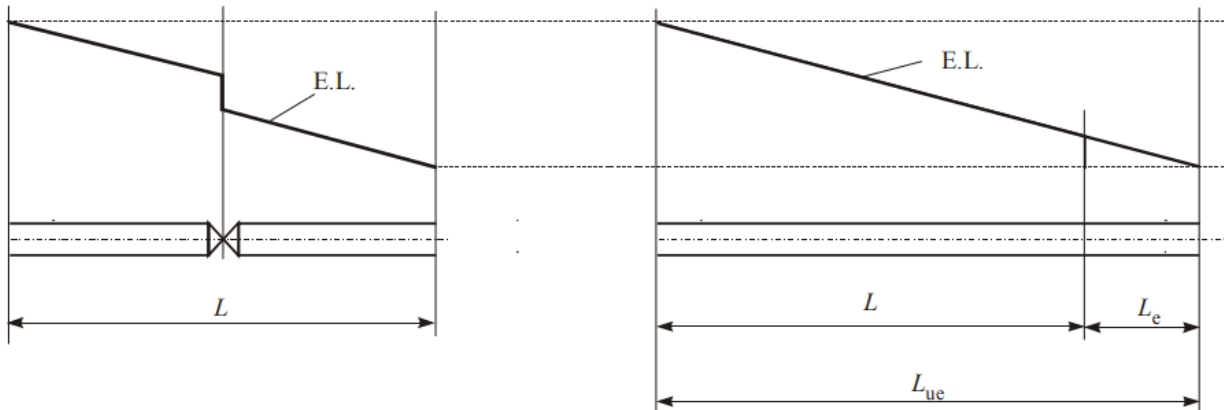
Slika 33. Promjeri različitih poprečnih presjeka cijevi [11]

Faktor trenja  $\lambda$  se očitava iz prethodno navedenog Moodyjeva dijagrama ili ga je moguće izračunati pomoću Swamee-Jaina formule, tako da se Reynoldsov broj i relativna visina hrapavosti određuju na temelju ekvivalentnog promjera. Srednja brzina  $v$  je definirana omjerom protoka  $Q$  i površine poprečnog presjeka  $S_T$ . Visina dužinskih gubitaka se određuje pomoću izraza

$$h_f = \lambda \frac{L}{D_e} \frac{v^2}{2g}$$

## 9.2 Ekvivalentna duljina cjevovoda

U slučaju strujanja fluida kroz cjevovod konstantnog promjera lokalni gubici se mogu zamijeniti ekvivalentnom duljinom cjevovoda. Na idućoj slici prikazana je energetska linija strujanja kroz cjevovod konstantnog promjera na kojem je ugrađen ventil, te se jasno vidi značajan pad visine energije na mjestu lokaog gubitka.



Slika 34. Pad visine energije na mjestu lokalnog gubitka [11]

Na slici do lokalni gubitak ventila zamijenjen je ekvivalentnom duljinom cjevovoda  $L_e$ , drugim riječima cijev je imaginarno produžena da bi pad tlaka u oba slučaja bio isti. Vrijedi

$$K \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{L_e}{D} \frac{v^2}{2g}, \text{ gdje je } L_e = D \frac{k}{\lambda}$$

## 10. Primjer proračuna linijskih gubitaka strujanja

U proračunskom dijelu rada potrebno je izračunati linijske gubitke strujanja u cijevi za četiri različite temperature 20, 40, 60, 80 stupnjeva Celzijevih, te za svaku temperaturu tri različita režima strujanja Reynoldsovih brojeva  $Re$  2300, 4000, 100000 ( $10^5$ ). Zadani parametri su promjer cijevi ( $D$ ) koji je 5 cm odnosno 0,05 metara, duljina cijevi ( $L$ ) 10 metara i apsolutna hrapavost ( $e$ ) 0,0015.

Za početak proračuna potrebno je odrediti kinematičke viskoznosti (za svaku temperaturu) koje su potrebne za kasnije određivanje brzine strujanja. Upotrebljena formula za izračun kinematičke viskoznosti je

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Gdje je dinamička viskoznost  $\mu$  za svaku temperaturu očitana iz [13]

Tablica 2. Dinamička viskoznost za različite temperature

Temperatura vode	Dinamička viskoznost
20	0.001002
40	0.000653
60	0.000467
80	0.000355

i gustoća iz [13]

Tablica 3. Gustoća vode pri različitim temperaturama

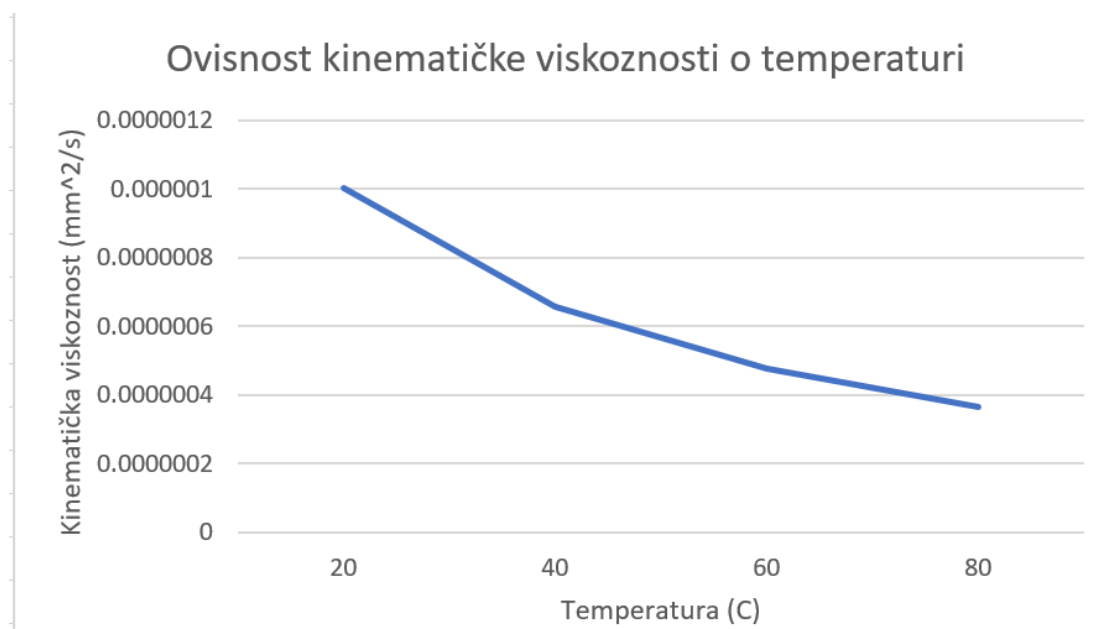
Temperatura vode	Gustoća
20	998
40	992
60	983
80	972

Uvrštavanjem očitanih podataka u navedenu formulu, dobiju se sljedeći rezultati

Tablica 4. Kinematička viskoznost za različite temperature

Temperatura vode	Kinematička viskoznost
20	$1.00401 \cdot 10^{-6}$
40	$6.58266 \cdot 10^{-7}$
60	$4.75076 \cdot 10^{-7}$
80	$3.65226 \cdot 10^{-7}$

Dobiveni rezultati mogu se usporediti sa temperaturom



Slika 35. Graf ovisnosti kinematičke viskoznosti o temperaturi

Na prethodnom dijagramu jasno se vidi da s porastom temperature (u stupnjevima Celzijevim) kinematička viskoznost ( $mm^2/s$ ) pada. ,

Idući korak je proračunati srednju brzinu strujanja za svaku temperaturu u sva tri režima strujanja. Izraz za proračun brzine strujanja je dobiven okretanjem formule za izračun Reynoldsovog broja koja je

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

Iz čega slijedi da je brzina strujanja jednaka umnošku Reynoldsovog broja i kinematičke viskoznosti podijeljene sa promjerom cijevi (m).

$$v = \frac{Re \cdot \nu}{D}$$

Da bi izračun bio moguć potrebno je poznavati parametre. Poznati parametri su promjer cijevi, kinematička viskoznost i Reynoldsov broj. Što se tiče parametra promjera cijevi, on je uvijek isti jer će se kroz cijeli proračun raditi o jednoj te istoj cijevi, dakle promjer cijevi je 0,005 metara (5 cm).

Tablica 5. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 20 stupnjeva Celzijevih

Temperatura vode	Reynoldsov broj	Kinematička viskoznost	Srednja brzina strujanja
20	2300	$1.00401 \cdot 10^{-6}$	0.04618446
	4000	$1.00401 \cdot 10^{-6}$	0.0803208
	100000	$1.00401 \cdot 10^{-6}$	2.00802

Tablica 6. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 40 stupnjeva Celzijevih

Temperatura vode	Reynoldsov broj	Kinematička viskoznost	Srednja brzina strujanja
40	2300	$6.58266 \cdot 10^{-7}$	0.030280236
	4000	$6.58266 \cdot 10^{-7}$	0.05266128
	100000	$6.58266 \cdot 10^{-7}$	1.316532

Tablica 7. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 60 stupnjeva Celzijevih

Temperatura vode	Reynoldsov broj	Kinematička viskoznost	Srednja brzina strujanja
60	2300	$4.75076 \cdot 10^{(-7)}$	0.021853496
	4000	$4.75076 \cdot 10^{(-7)}$	0.03800608
	100000	$4.75076 \cdot 10^{(-7)}$	0.950152

Tablica 8. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 80 stupnjeva Celzijevih

Temperatura vode	Reynoldsov broj	Kinematička viskoznost	Srednja brzina strujanja
80	2300	$3.65226 \cdot 10^{(-7)}$	0.016800396
	4000	$3.65226 \cdot 10^{(-7)}$	0.02921808
	100000	$3.65226 \cdot 10^{(-7)}$	0.730452

Posljednja nepoznanica potrebna za izračun linijskih gubitaka je bezdimenzijski parametar koeficijent trenja  $\lambda$ . Za koeficijent trenja ima više načina izračuna. Ako se računa  $\lambda$  za Reynoldsov broj do 2300 može se koristiti jednostavan izraz

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Kako je Reynoldsov broj 2300 granica između laminarnog i prijelaznog režima strujanja, potrebno ga je izračunati i pomoću navedenog izraza i pomoću izraza za proračunavanje  $\lambda$  u turbulentnom režimu strujanja (Colebrooke i Swamee-Jaine). Uvrštavanjem Reynoldsovog broja u navedeni izraz

$$\lambda = \frac{64}{2300}$$

rezultat je  $\lambda=0.027826087$ . Nadalje potrebno proračunati  $\lambda$  za turbulentni režim strujanja. Neka prvi izraz za dobivanje  $\lambda$  u turbulentnom režimu bude Swamee-Jaine. Za izračun  $\lambda$  Swamee-Jaine formulom potrebno je poznavati parametre poput apsolutne hrapavosti, relativne hrapavosti i Reynoldsovog broja. No, kako relativna hrapavost predstavlja omjer apsolutne hrapavosti i Reynoldsovog broja, potrebno je prvo nju izračunati. Izraz za proračunavanje relativne hrapavosti je

$$\text{Relativna hrapavost} = e / D$$

Odnosno

$$\text{Relativna hrapavost} = \frac{0.0015}{0.05} = 0.03$$

Uvrštavanjem svih potrebnih parametara u Swamee-Jaine izraz za sva tri režima strujanja (2300, 4000, 100000).

$$\lambda = \frac{1.325}{\left[ \ln \left( \frac{e}{3.7 \cdot D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

Dolazi se do rezultata

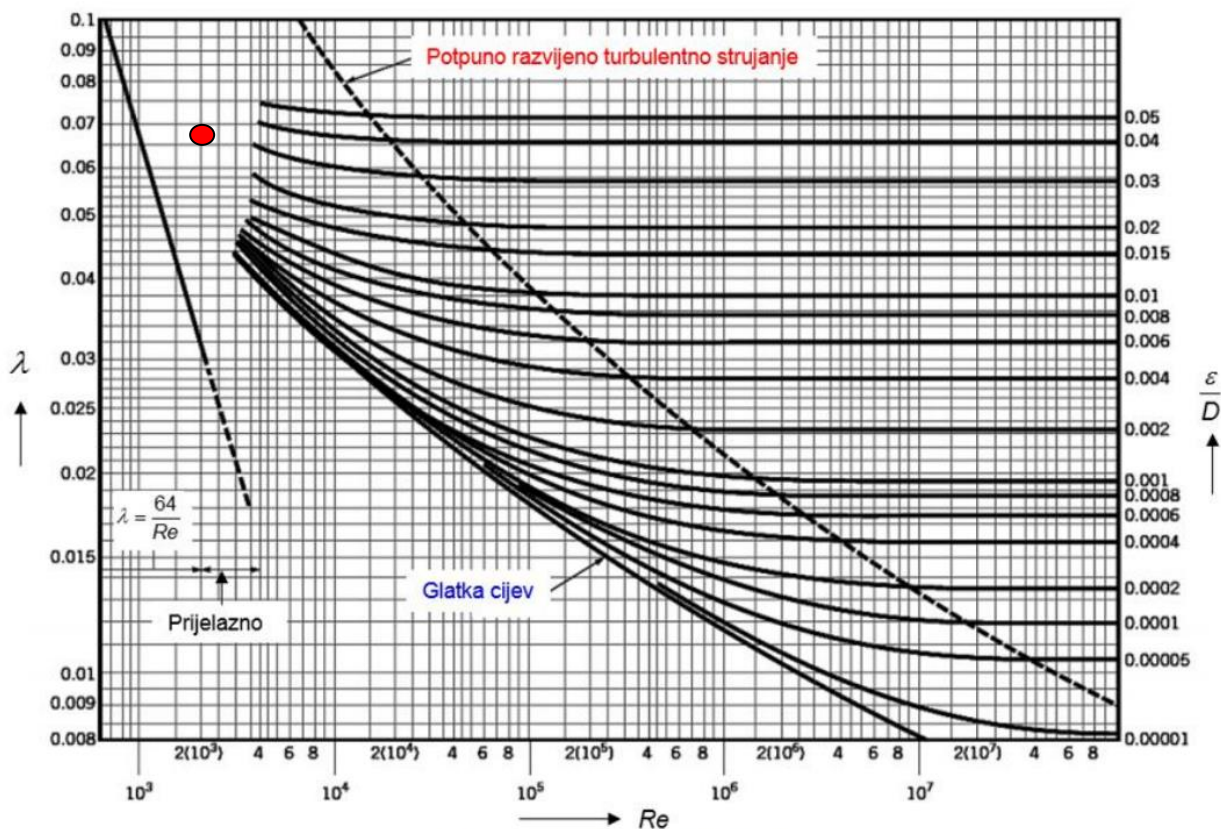
Tablica 9. Rezultati koeficijenta trenja za Re=2300, Re=4000, Re=100000

Reynoldsov broj Re	Apsolutna hrapavost $e$	Relativna hrapavost $e / D$	Koeficijent trenja $\lambda$
2300	0.0015	0.03	0.071541247
4000	0.0015	0.03	0.066182984
100000	0.0015	0.03	0.05768278

Dok se  $\lambda$  Colebrookovom formulom računa iterativnim putem. Što znači da se u izrazu

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86859 \cdot \ln \left( 0.2698 \cdot \frac{e}{D} + \frac{2.512}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

ne može direktno dobiti  $\lambda$ , nego se uz poznate parametre Re i  $e / D$  iz Moodyevog dijagrama očitava oku najbliža veličina, što je u ovom slučaju ( Re=2300 i  $e / D = 0.03$ )  $\lambda$  (označen crvenom točkom).



Slika 36. Traženje  $\lambda$  u Moodyevom dijagramu [5]

Nadalje, u gore navedeni izraz se uvrštava očitana vrijednost za  $\lambda$ , no tada postoji mogućnost da rezultat nije dovoljno točan, stoga se proces ponavlja nekoliko puta sve dok se dobivene vrijednosti ne počnu vrtjeti oko jedne vrijednosti koju se smatra dovoljno točnom za kasnije uvrštavanje u izraz za proračun linijskih gubitaka.

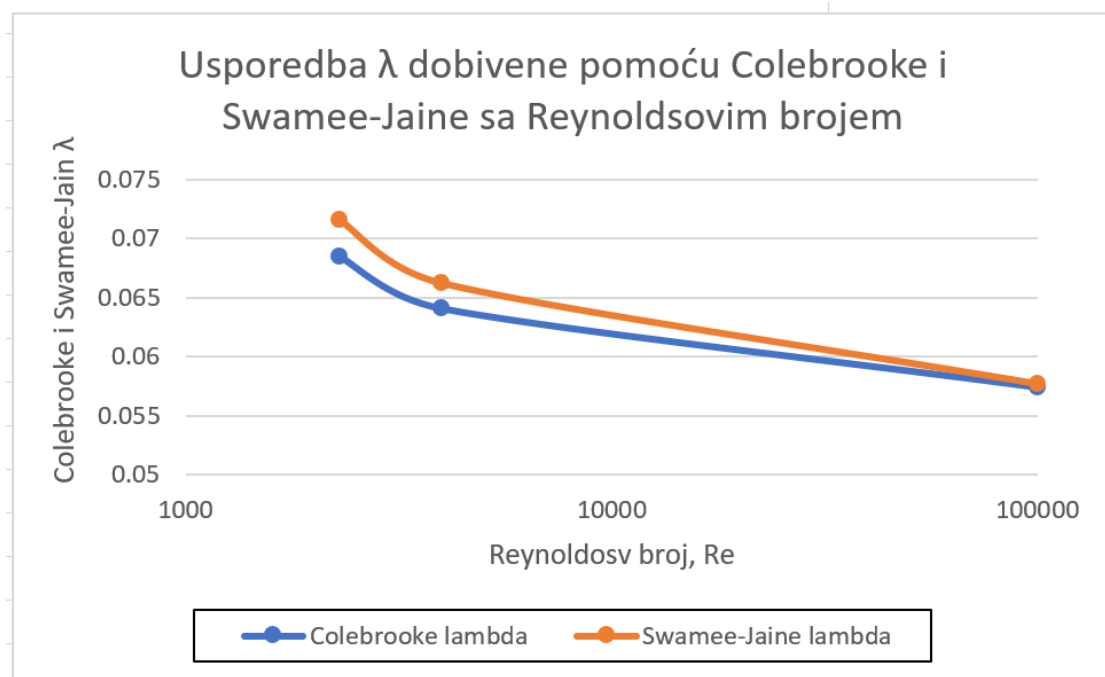
U ovom radu iterativni postupak za proračun  $\lambda$  (Colebrooke) proveden je u Excel-u. Proračun  $\lambda$  za svaki zadani režim strujanja ( 2300, 4000 i 100000 ) napravljen je na način da se svaka strana Colebrokove jednačbe zapisuje u zasebnom stupcu. Odabirom  $\lambda$  iz Moodyevog dijagrama, te uvrštavanjem poznatih parametara u jednačbu dobiveno je rješenje, no s obzirom da postoji mogućnost da rješenje nije potpuno točno, dodan je dodatni stupac koji je prikazivao razliku lijeve i desne strane Colebrokove jednačbe. Zahvaljujući Goal seek naredbi u Excel-u ( Data > What-If Analysis > Goal Seek), rezultat stupca koji je prikazivao razliku lijeve i desne strane jednačbe se mogao svesti na nulu promjenom veličine u stupcu koji prikazuje  $\lambda$ , te je promjenom prikazan  $\lambda$  najbliži točnoj veličini. Konkretni primjer se može vidjeti na sljedećoj slici (37).



	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
4			<b>Colebrooke proračun</b>									
5		Reynoldsov broj, Re	Koeficijent trenja, $\lambda$	Lijeva strana jednadžbe, L	Desna strana jednadžbe, D					D-L		
6		2300	0.068428137	3.822809378	3.822374002					-0.000435376		
7		4000	0.064043376	3.951508237	3.95139902					-0.000109216		
8		100000	0.057419256	4.173219422	4.17250108					-0.000718342		
9												

Slika 37. Proračun  $\lambda$  pomoću Colebrookove formule u Excel-u

Poznavanjem veličina  $\lambda$  dobivene putem Colebrookove i Swamee-Jaine formule se rezultati mogu usporediti sa Reynoldsovim brojem što je prikazano na slici (38).



Slika 38. Usporedba rezultata  $\lambda$  dobivenih putem Colebrookove i Swamee-Jaine formule

Iz grafa se može zaključiti da razlike u veličini  $\lambda$  nisu velike, te da im porastom Reynoldsovog broja veličina pada. Također,  $\lambda$  veličine se mogu usporediti i pomoću relativne razlike izražene sljedećom formulom ( A – Colebrooke  $\lambda$ , B – Swamee-Jaine  $\lambda$  )

$$\text{Relativna razlika } \lambda = \frac{A - B}{A}$$

Dobiveni rezultati su sljedeći

Tablica 10. Relativna razlika dobivenih  $\lambda$

Reynoldsov broj Re	$\lambda$ Colebrooke (A)	$\lambda$ Swamee-Jaine (B)	Relativna razlika $\lambda$
2300	0.068428137	0.071541247	-4.55%
4000	0.064043376	0.066182984	-3.34%
100000	0.057419256	0.05768278	-0.46%

Rezultati relativne razlike  $\lambda$  se mogu usporediti sa Reynoldsovim brojem, što se može vidjeti na idućem grafu



Slika 39. Relativna razlika dobivenih  $\lambda$  s povećanjem Re broja

Putem grafa se može zaključiti kako relativna razlika  $\lambda$  dobivena pomoću Colebrookove i Swamee-Jaine formule raste s porastom Reynoldsovog broja Re.

Sada kada su poznati svi potrebni ulazni parametri, moguće je izračunati linijske gubitke.

Linijski gubici se računaju pomoću sljedeće formule

$$h_{lin} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

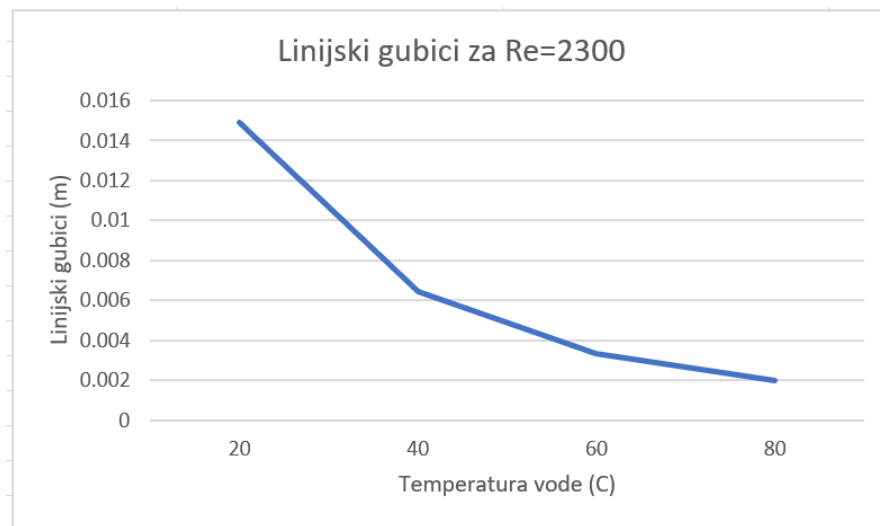
Dobiveni rezultati linijskih gubitaka u cijevi za temperature vode 20, 40, 60 i 80 Celzijevih

stupnjeva pri laminarno-prijelaznom režimu strujanja ( $Re=2300$ ) su

Tablica 11. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temperature vode pri  $Re=2300$

Temperatura vode (C)	Duljina cijevi L (m)	Promjer cijevi D (m)	$\lambda$ za $Re=2300$	Linijski gubici (m)
20	100	0.05	0.068428137	0.014893624
40	100	0.05	0.068428137	0.006402169
60	100	0.05	0.068428137	0.003334652
80	100	0.05	0.068428137	0.001970823

Na temelju dobivenih rezultata, može se prikazati ovisnost linijskih gubitaka o temperaturi vode



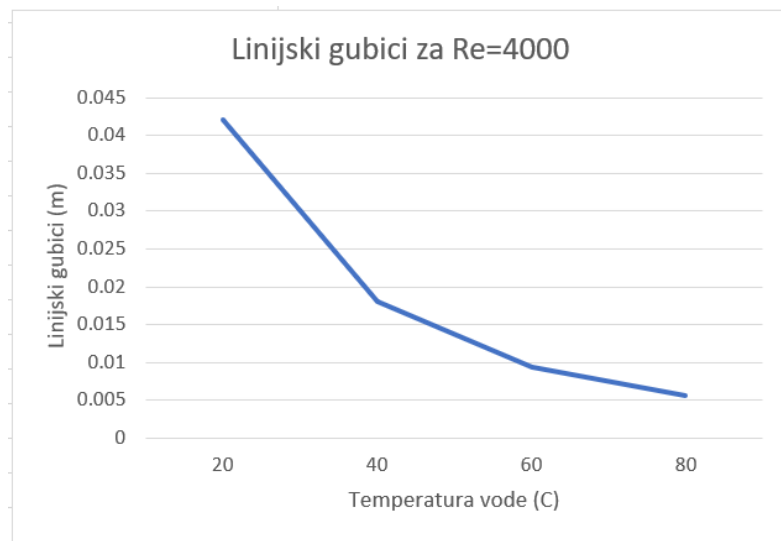
Slika 40. Promjena linijskih gubitaka sa temperaturom vode pri  $Re=2300$

Graf govori kako u laminarno-prijelaznom režimu strujanja porastom temperature linijski gubici padaju. Nadalje, proračunavaju se linijski gubici pri prijelazno-turbulentnom režimu strujanja sa drugim  $\lambda$  brojem, čiji su rezultati sljedeći

Tablica 12. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temperature vode pri  $Re=4000$

Temperatura vode (C)	Duljina cijevi L (m)	Promjer cijevi D (m)	$\lambda$ za $Re=4000$	Linijski gubici (m)
20	100	0.05	0.064043376	0.042160349
40	100	0.05	0.064043376	0.018123036
60	100	0.05	0.064043376	0.009439615
80	100	0.05	0.064043376	0.005578937

Usporedba rezultat linijskih gubitaka pri prijelazno-turbulentnom režimu strujanja može se prikazati grafom



Slika 41. Promjena linijskih gubitaka sa temperaturom vode pri  $Re=4000$

Na temelju rezultata prikazanih na grafu linijski gubici pri  $Re=4000$  padaju s porastom temperature.

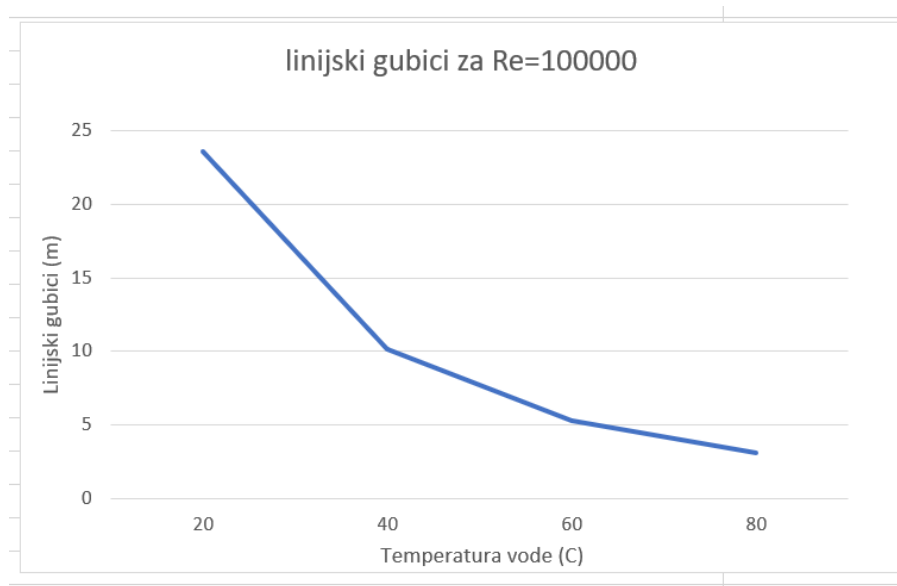
Veličine linijski gubitaka potpuno razvijenog turbulentnog strujanja ( $Re=100000$ ) pri  $\lambda=0.057419256$  su prikazani u sljedećoj tablici (13).

Tablica 13. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temperature vode pri  $Re=100000$

Temperatura vode (C)	Duljina cijevi L (m)	Promjer cijevi D (m)	$\lambda$ za $Re=100000$	Linijski gubici (m)
20	100	0.05	0.057419256	23.62476806

40	100	0.05	0.057419256	10.15533664
60	100	0.05	0.057419256	5.289536995
80	100	0.05	0.057419256	3.126186262

Ovisnost dobivenih rezultat linijskih gubitaka o temperaturi vidi se na sljedećem grafu



Slika 42. Promjena linijskih gubitaka sa temperaturom vode pri Re=100000

Iz kojeg se očitava da linijski gubici pri Re=100000 padaju s porastom temperature kao i kod grafova za laminarno-prijelazno i prijelazno-turbulentno strujanje.

Kroz prethodni proračun se može vidjeti ponašanje linijskih gubitaka s obzirom na različite ulazne parametre. No konkretan problem ovoga rada je proračunati linijski gubitke pri brzini strujanja 2 m/s u četiri različite temperature 20, 40, 60, 80 stupnjeva Celzijevih za istu cijev. Prvi korak je proračunavanje viskoznosti, no kako su temperature iste kao u prethodnom proračunu njihove vrijednosti možemo prepisati

Tablica 14. Kinematičke viskoznosti za vodu temperature 20, 40, 60, 80 stupnjeva Celzijevih

Temperatura vode (C)	Kinematička viskoznost
20	$1.00401 \cdot 10^{-6}$
40	$6.58266 \cdot 10^{-7}$
60	$4.75076 \cdot 10^{-7}$
80	$3.65226 \cdot 10^{-7}$

Nadalje, poznavajući brzinu strujanja može se izračunati Reynoldsov broj. Reynoldsov broj računa se pomoću formule () navedene u prethodnom proračunu. Rezultati Re broja za kinematičku viskoznost pri temperaturama ( 20, 40, 60, 80 ) za promjer cijevi 0.05 metara su

Tablica 15. Reynoldsovi brojevi za vodu ( 20, 40, 60, 80 ) pri brzini strujanja 2 m / s

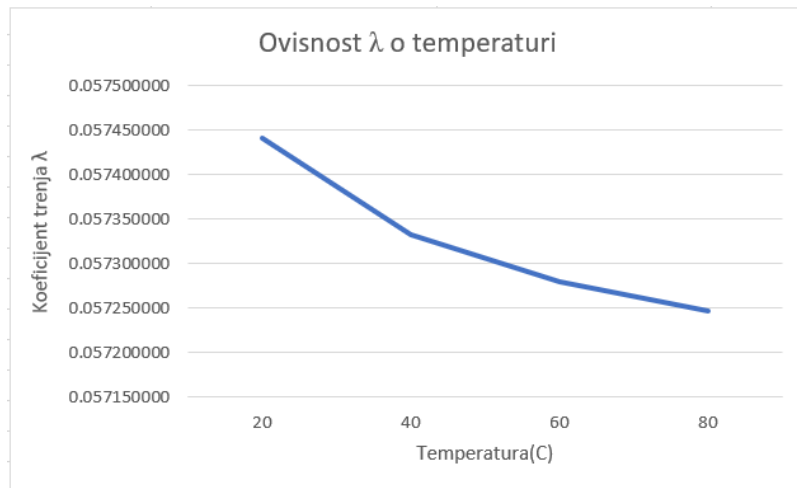
Brzina strujanja $m / s$	Viskoznost	Promjer cijevi (m)	Reynoldsov broj
2	$1.00401 \cdot 10^{-6}$	0.05	99600.60
2	$6.58266 \cdot 10^{-7}$	0.05	151914.27
2	$4.75076 \cdot 10^{-7}$	0.05	210492.64
2	$3.65226 \cdot 10^{-7}$	0.05	273803.07

Posljednji preostali nepoznati parametar za proračun linijskih gubitaka je koeficijent trenja  $\lambda$ . Koeficijent trenja je proračunat u Excel-u istom metodom kao i u prethodnom proračunu (stranica 52-53), te su rezultati sljedeći

Tablica 16. Rezultati koeficijenta trenja  $\lambda$

Temperatura vode (C)	Reynoldsov broj, Re	Relativna hrapavost $e / D$	Koeficijent trenja $\lambda$
20	99600.60	0.03	0.057440945
40	151914.27	0.03	0.057333316
60	210492.64	0.03	0.057280578
80	273803.07	0.03	0.057246982

Na temelju poznatih  $\lambda$  veličina može se prikazati njihova ovisnost o temperaturi



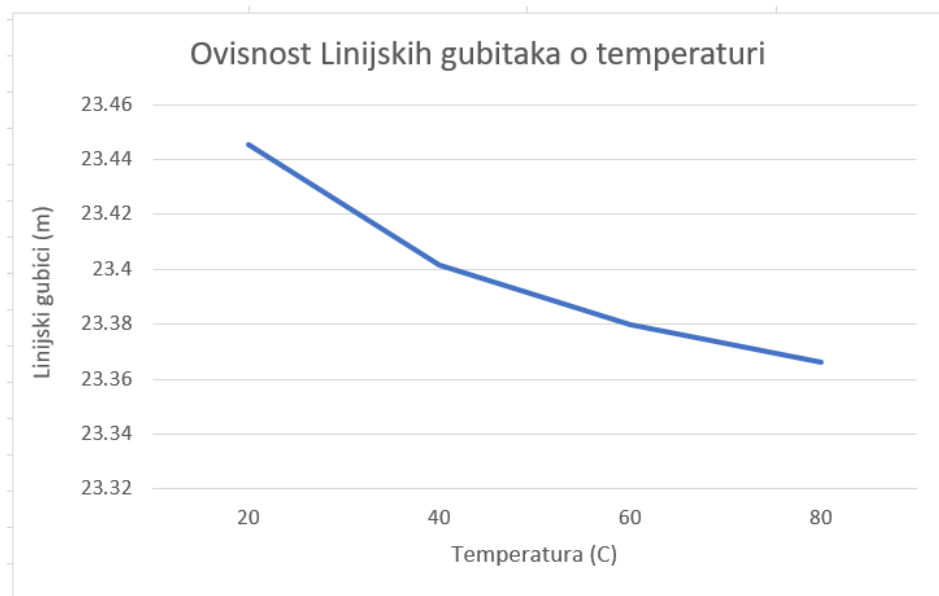
Slika 43. Graf ovisnosti  $\lambda$  o temperaturi

Iz grafa se očitava da koeficijent trenja pada s porastom temperature. Konačno poznavanjem svih potrebnih parametara moguće je izračunati linijske gubitke za sve četiri temperature. Linijski gubici se računaju pomoću formule navede u prethodnom proračunu, te su rezultati

Tablica 17. Rezultati linijskih gubitaka pri brzini strujanja  $2 \text{ m / s}$

Brzina strujanja $m / s$	Koeficijent trenja $\lambda$	Duljina cijevi (m)	Promjer cijevi (m)	Linijski gubici (m)
2	0.057440945	100	0.05	23.44528367
2	0.057333316	100	0.05	23.40135347
2	0.057280578	100	0.05	23.37982776
2	0.057246982	100	0.05	23.3661151

Konačne rezultate linijskih gubitaka korisno je usporediti s temperaturom, što se vidi na sljedećem grafu



Slika 44. Promjena linijskih gubitaka s temperaturom vode

Iz grafa se očitava da će linijski gubici pri porastu temperature blago padati. Relativna razlika linijskih gubitaka u postotku između najniže i najviše temperature je 0.33%, što je vrlo mala razlika, te se u praksi temperaturi između navedenih veličina ne mora davati na važnosti.



## 11. Zaključak

Opisom fizike strujanja fluida kroz rad, poznate su činjenice i podaci pomoću kojih se mogu rješavati konkretni problemi u struci. U ovom radu je zadatak bio proračunati i usporediti linijske gubitke i koeficijent trenja pomoću Colebrookove i Swamee-Jaine formule pri tri različita režima strujanja ( $Re$  2300, 4000, 100000) i pri četiri različite temperature kroz protočnu ravnu cijev duljine 100 metara i promjera 0.05 metara, pri čemu su pronađene granične brzine za navedene  $Re$  brojeve. Iz rezultata se zaključuje da koeficijent trenja zbog ovisnosti o Reynoldosovom broju, povećanjem vrijednosti  $Re$  broja veličina koeficijenta trenja se smanjuje. Također na temelju rezultata proračuna linijskih gubitaka se može zaključiti da s većom temperaturom vode gubici se blago smanjuju. Rezultati gubitaka između temperatura 20-80 stupnjeva Celzijevih pri projektnoj brzini  $2 \text{ m / s}$  su dali razliku od 0.33%, što je ubiti mala razlika i ne igra veliku ulogu kod gubitaka u praksi pri takvim temperaturama, te se može zanemariti. No, u slučaju rezultata većih odstupanja, rezultati se mogu korigirati promjenom drugih parametara. Drugim riječima potrebno je uzeti cijev optimalnijeg promjera i duljine ako je to moguće, uz to prilagoditi brzinu strujanja pomoću uređaja ili strojeva koji to omogućuju, te odabirom cijevi manje hrapavosti, što dovodi u pitanje ekonomičnost projekta, prema tome potrebno je održati zadovoljavajući omjer cijene i kvalitete projekta.

## 12. Popis literature

1. Sopta, L., Kranjčević, L. (2006) Mehanika fluida: Skripta za studente Tehničkog fakulteta u Rijeci, Rijeka
2. Pečornik, M. (1989) Tehnička mehanika fluida, Rijeka
3. Lončar, G. (2022) Mehanika tekućina, Zagreb
4. Cengel, Y., Cimbala, J. (2014) Fluid mechanics: Fundamentals and applications
5. Karabaić, D., (2021) Materijali s predavanja, Mehanika fluida , Tehnički fakultet Pula, Sveučilište Juraj Dobrila, Pula
6. Ferdelji, N., Materijali s predavanja, Prijenos topline i tvari, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb
7. Petrić, J.,(2012) Materijali s predavanja, Hidraulika i pneumatika, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb
8. Batistić, I., (2016) Proračun koeficijenata otpora i tlaka optjecanje cilindra podkritičnim Reynoldsovim brojem. Završni rad. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
9. Stanford University center for turbulence research. Direct numerical simulation of turbulent combustion of a swirl burner in proceedings of the 2010 CTR Summer Program. URL: <https://ctr.stanford.edu/direct-numerical-simulation-turbulent-combustion-swirl-burner-proceedings-2010-ctr-summer-program>
10. Henriksson, M., Sjoqvist, L., Parmhed, O., Fureby, C. (2015) Numerical laser beam propagation using Large eddy simulation of a jet engine flow field. URL: <https://www.spiedigitallibrary.org/journals/optical-engineering/>
11. Grbić, N. (2017) Hidraulički proračun cjevovoda. URL: <https://www.scribd.com/document/356926830/HIDARAULI%C4%8CKI-PRORA%C4%8CUN-CJEVOVODA-pdf>
12. Mihočević, N. (2016) Mehanizmi za povećanje uzgona. Završni rad. Fakultet prometnih znanosti, Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb
13. Mehanika tekućine – hidrostatika. URL: <https://slideplayer.gr/slide/14724565/>

## Popis slika

Slika 1. Ilustracija viskoznosti fluida [7].....	9
Slika 2. Promjena viskoznosti s temperaturom [5] .....	10
Slika 3. Laminarni režim strujanja u cijevi [5].....	11
Slika 4. Promjena brzine strujanja fluida po vremenu pri laminarnom strujanju [5] .....	11
Slika 5. Profil brzine fluida laminarnog režima strujanja [5] .....	12
Slika 6. Graf nestacionarnog strujanja [5] .....	13
Slika 7. Promjena fizikalne veličine u vremenu pri turbulentnom strujanju [5] .....	14
Slika 8. Usporedba profila brzina laminarnog i turbulentnog strujanja [5] .....	15
Slika 9. Mrežne metode za mjerenje brzine fluida.....	16
Slika 10. Idealan, laminaran i turbulentan oblik profila brzine [1].....	17
Slika 11. Turbulentni profil brzine [1] .....	19
Slika 12. Primjena zakona očuvanja momenata količine gibanja ( raspršivač vode ) [1] .....	26
Slika 13. Direktna numerička simulacija turbulentnog izgaranja [9].....	28
Slika 14. Simulacija velikih vrtloga mlaznog motora [10].....	29
Slika 15. Ponašanje fizikalne veličine $\psi$ u strujanju [8] .....	30
Slika 16. Djelovanje viskoznih i tlačnih sila na avionsko krilo [1] .....	32
Slika 17. Prikaz graničnog sloja [5].....	33
Slika 18. Nastrujavanje fluida na kuglu [1] .....	34
Slika 19. Koeficijent otpora strujanja za više likova različitih geometrija [1] .....	35
Slika 20. Odnos sile otpora i uzgona pri napadnom kutu [12].....	36
Slika 21. Profil brzine idealnog potencijalnog strujanja u cijevi [5].....	37
Slika 22. Profil brzine laminarnog strujanja [5] .....	37
Slika 23. Hagen-Poiseuilleov zakon laminarnog strujanja [5].....	38
Slika 24. Srednja brzina fluida laminarnog strujanja [5] .....	40
Slika 25. Profil brzine turbulentnog strujanja u cijevi [5].....	41
Slika 26. Pad tlaka u protočnoj cijevi [5] .....	42
Slika 27. Hrapavost protočne cijevi [5].....	43
Slika 28. Razlika strujanja pri hrapavoj i glatkoj cijevi [5].....	43
Slika 29. Moodyev dijagram [5] .....	44
Slika 30. Lokalni gubici postupnog suženja u cijevi [1] .....	46
Slika 31. Lokalni gubici kod koljena [1] .....	47
Slika 32. Lokalni gubici pri ulasku fluida u cijev [1] .....	47
Slika 33. Promjeri različitih poprečnih presjeka cijevi [11] .....	48
Slika 34. Pad visine energije na mjestu lokalnog gubitka [11] .....	49
Slika 35. Graf ovisnosti kinematičke viskoznosti o temperaturi .....	51
Slika 36. Traženje $\lambda$ u Moodyevom dijagramu [5] .....	55
Slika 37. Proračun $\lambda$ pomoću Colebrookove formule u Excel-u.....	56
Slika 38. Usporedba rezultata $\lambda$ dobivenih putem Colebrookove i Swamee-Jaine formule...	56
Slika 39. Ponašanje relativne razlike dobivenih $\lambda$ s povećanjem Re broja .....	57
Slika 40. Ponašanje linijskih gubitaka s promjenom temperature vode pri $Re=2300$ .....	58
Slika 41. Ponašanje linijskih gubitaka s promjenom temperature vode pri $Re=2300$ .....	59
Slika 42. Ponašanje linijskih gubitaka s promjenom temperature vode pri $Re=100000$ .....	60
Slika 43. Graf ovisnosti $\lambda$ o temperaturi .....	62
Slika 44. Graf ponašanja veličina linijskih gubitaka pri različitim temperaturama vode.....	63

## Popis tablica

Tablica 1. Ovisnost eksponenta $n$ o Reynoldsovom broju [5] .....	15
Tablica 2. Dinamčka viskoznost za različite temperature .....	50
Tablica 3. Gustoća vode pri različitim temperaturama .....	50
Tablica 4. Kinematička viskoznost za različite temperature .....	51
Tablica 5. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 20 stupnjeva Celzijevih ..	52
Tablica 6. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 40 stupnjeva Celzijevih ..	52
Tablica 7. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 60 stupnjeva Celzijevih ..	53
Tablica 8. Rezultati srednje brzine strujanja pri temperaturi vode 80 stupnjeva Celzijevih ..	53
Tablica 9. Rezultati koeficijenta trenja za $Re=2300$ , $Re=4000$ , $Re=100000$ .....	54
Tablica 10. Relativna razlika dobivenih $\lambda$ .....	57
Tablica 11. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temeprature vode pri $Re=2300$ .....	58
Tablica 12. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temeprature vode pri $Re=4000$ .....	59
Tablica 13. Rezultati linijskih gubitaka za sve četiri temeprature vode pri $Re=100000$ .....	59
Tablica 14. Kinematičke viskoznosti za vodu temperature 20, 40, 60, 80 strupnjeva Celzijevih .....	60
Tablica 15. Reynoldsovi brojevi za vodu ( 20, 40, 60, 80 ) pri brzini strujanja 2 m / s .....	61
Tablica 16. Rezultati koeficijenta trenja $\lambda$ .....	61
Tablica 17. Rezultati linijskih gubitaka pri brzini strujanja 2 m / s .....	62

## Sažetak

Cilj ovog rada bio je opisati i objasniti pojmove viskoznosti, laminarnog i turbulentnog strujanja, te opis fizike graničnog sloja pomoću kojih se doznaju glavni podaci potrebni za proračun gubitaka u cjevovodima. U radu su prikazani i uspoređeni rezultati proračuna linijskih gubitaka za ravnu cijev duljine 100 metara i promjera 5 centimetara, za četiri različite temperature (20, 40, 60 i 80 stupnjeva Celzijevih), pri tri različita režima strujanja ( $Re$  2300, 4000, 100000), za koje je bilo potrebno odrediti granične brzine. Koeficijent trenja je proračunat pomoću Swamee-Jaine formule, te Colebrookove formule koja se računa iterativnim postupkom koji je proračunat i prikazan u Excel-u. Dobiveni rezultati govore da porastom temperature gubici padaju. Također proračunati su linijski gubici u istoj cijevi pri projektne brzini  $2 \text{ m/s}$  čiji su rezultati prikazali blagi pad gubitaka od 0.33% pri porastu temperature od temperature 20 do 80 stupnjeva Celzijevih, što nam govori kako je to mala razlika te se može zanemariti u praksi. Dok se kod rezultata pri većim odstupanjima gubici reguliraju optimiziranjem preostalih parametara poput brzine, duljine, promjera i hrapavosti cijevi uz što je potrebno održati omjer kvalitete projekta i cijene.

Ključne riječi: Viskoznost, laminarno i turbulentno strujanje, gubici u cjevovodu, temperatura.

## Summary

The goal of this paper was to describe and explain the concepts of viscosity, laminar and turbulent flow, as well as describe the physics of the boundary layer by means of which we learn the main data required for loss calculation in pipelines. In this paper, i have demonstrated and compare the results of calculations of line losses for a straight pipe 100 meters long and with a diameter of 5 centimeters, for four different temperatures (20, 40, 60 and 80 degrees Celsius) at three different flow regimes ( Re 2300, 4000, 100000 ), for which it was necessary to determine speed limits. Friction factor was calculated using a Swamee-Jaine formula, as well as the Colebrooke formula that is calculated through an iterative procedure and presented in Excel. The obtained results claim that losses decrease as temperature rises. Likewise, line losses are calculated in the same pipe at a design speed od  $2 \text{ m / s}$ , which results have demonstrated a slight loss decline of 0.33% at a temperature rise ranging between 20 and 80 degrees Celsius, which tells us it is an insignificant difference that can be disregarded in practice. Results at larger deviations are regulated by optimizing the remaining parameters such as speed, length, diameter, and roughness of pipes, while also maintaining the ratio of quality and price of the project.

Key words: Viscosity, laminar and turbulent flow, pipeline losses, temperature.