Primijenjena teorija kategorija

Šuljić, Paulo

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Tehnički fakultet u Puli

PAULO ŠULJIĆ

PRIMIJENJENA TEORIJA KATEGORIJA

Završni rad

Pula, 29. rujna 2023. godine

Sveučilište Jurja Dobrile u Puli
Tehnički fakultet u Puli

PAULO ŠULJIĆ

PRIMIJENJENA TEORIJA KATEGORIJA

Završni rad

JMB: 0069074163 redoviti student

Studijski smjer: računarstvo

Predmet: Matematika 1, Matematika 2, Numerička matematika

Znanstveno područje: 1. Područje prirodnih znanosti
Znanstveno polje: 1.01 Matematika
Znanstvena grana: 1.01.01 algebra, 1.01.05 matematička logika i računarstvo
Mentor: Neven Grbac

Pula, 29. rujna 2023. godine

Tehnički fakultet u Puli

Ime i prezime studenta/ice Paulo Šuljić

JMBAG 0069074163

Status: ☒ redoviti ☐ izvanredni

PRIJAVA TEME ZAVRŠNOG RADA

Neven Grbac
Ime i prezime mentora

Računarstvo
Studij

Matematika 1, Matematika 2, Numerička matematika
Kolegij

Potvrđujem da sam prihvatio/la temu završnog/diplomskog rada pod naslovom:

Primijenjena teorija kategorija

(na hrvatskom jeziku)

Applied category theory

(na engleskom jeziku)

Datum: 14.4.2023.

IZJAVA O KORIŠTENJU AUTORSKOGA DJELA

Ja, Paulo Šuljić, dajem odobrenje Sveučilištu Jurja Dobrile u Puli, nositelju prava korištenja, da moj završni rad pod nazivom „Primijenjena teorija kategorija“ upotrijebi da tako navedeno autorsko djelo objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli te preslika u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu sa Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

Potpis

Šuljić P

U Puli, 29.9.2023.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani Paulo Šuljić, kandidat za prvostupnika računarstva ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljeni način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Student

U Puli, 29.9.2023.

Sadržaj

1. Uvod 3

2. Osnovni koncepti teorije kategorija 4

2.1. Što je teorija kategorija? 4

2.2. Kategorija u matematici 7

2.3. Morfizam 9

2.4. Kompozicija morfizama i asocijativnost 11

2.5. Identitetni morfizam 13

2.6. Funktori 17

2.7. Prirodne transformacije 19

3. Primjena teorije kategorija 22

3.1. Teorija kategorija u algebri 22

3.2. Teorija kategorija u topologiji 24

3.3. Filozofija i teorija kategorija 25

3.4. Primjene u računarstvu 25

3.5. Primjene u fizici, biologiji i lingvistici 26

3.6. Budućnost primjene teorije kategorija 27

4. Napredni koncepti 28

4.1. Ekvivalentnost kategorija 28

4.2. Yonedaova lema 29

5. Zaključak 31

6. Popis literature 32

7. Slike i dijagrami 34

8. Popis simbola i mjernih jedinica 35

9. Sažetak 36

1. Uvod

Teorija kategorija predstavlja jedno od najfascinantnijih i najapstraktnijih područja matematike, čija primjena seže mnogo dalje od samih matematičkih disciplina. Nastala je tijekom 20. stoljeća, a njeni temelji postavljeni su od strane matematičara Samuela Eilenberga i Saundersa MacLanea tijekom 1940-ih godina. Kroz godine, teorija kategorija je doživjela značajan razvoj i postala središnji alat u mnogim granama matematike, uključujući algebru, geometriju, topologiju, logiku i računarstvo.

Cilj ovog rada je pružiti uvid u temeljne koncepte teorije kategorija te razjasniti njenu apstraktnu prirodu. Također, zaronit ćemo u svijet njene primjene, gdje ću istražiti gdje ju, i na koji način, susrećemo. U prvoj polovici rada, više ću se posvetiti temeljnim konceptima kao što su: kategorije, morfizmi, funktori i prirodne transformacije. Objasnit ću kako se morfizmi komponiraju i što su to identitetni morfizmi. Nakon upoznavanja s temeljem teorije kategorija, pažnju ću usmjeriti na njezinu primjenu i istražiti u kojim znanstvenim disciplinama ju susrećemo. Osim osnovnih koncepata i primjene teorije kategorija, spomenut ću neke napredne koncepte kao što su Yonedaova lema i ekvivalentnost kategorija te za kraj navesti nekoliko značajnih prirodnih transformacija.

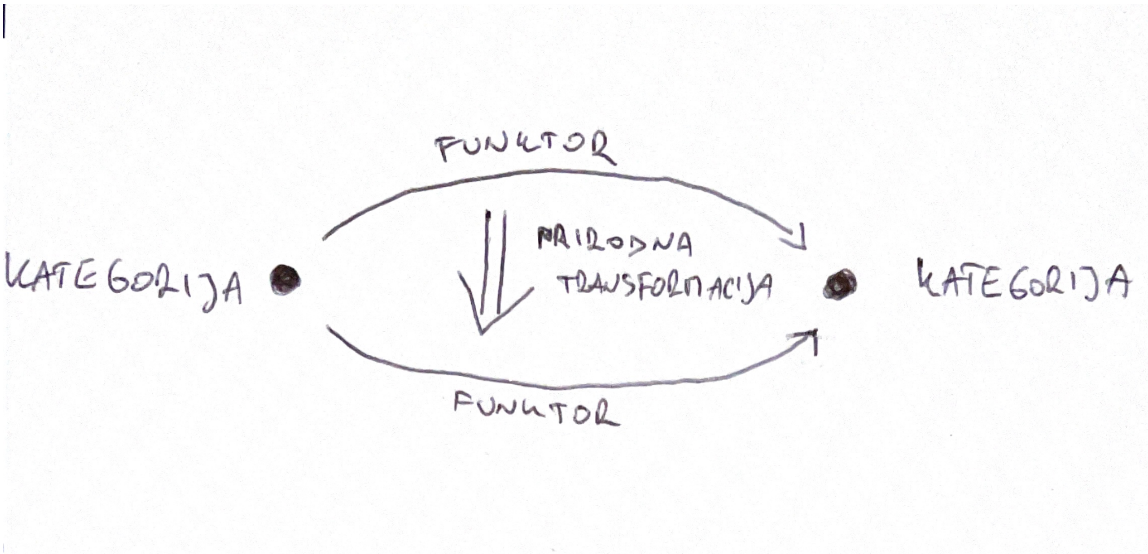
Teorija kategorija omogućuje matematičarima da razmatraju i uspoređuju različite matematičke strukture na fundamentalan način. Razumjeti teoriju kategorija znači otvoriti vrata za dublje razumijevanje matematike i njenih primjena izvan matematike.

2. Osnovni koncepti teorije kategorija

2.1. Što je teorija kategorija?

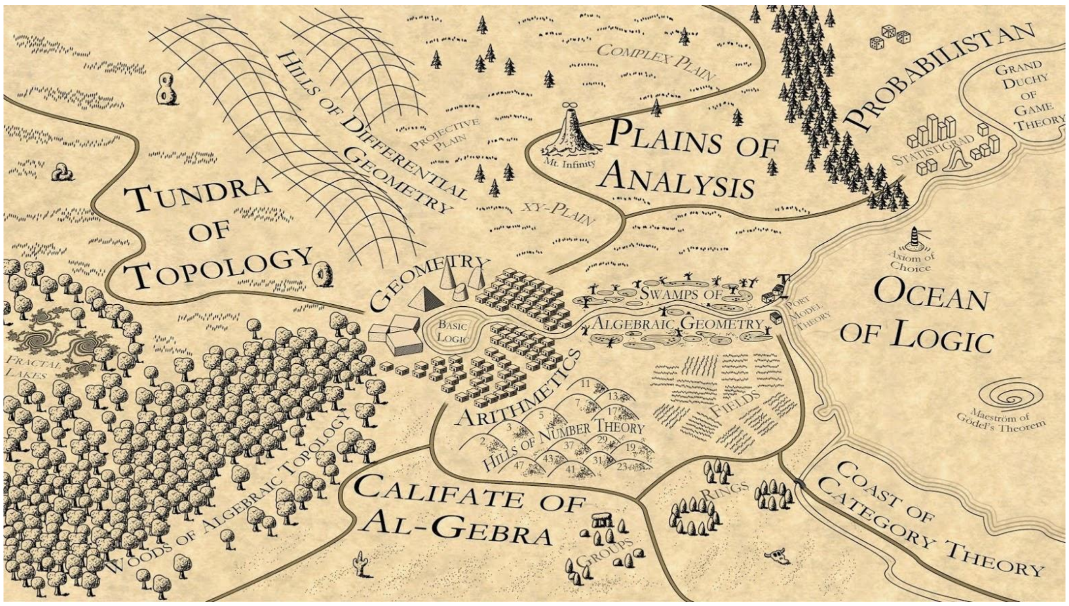
Teorija kategorija je grana matematike koja pokušava generalizirati matematiku u smislu kategorija neovisno o tome što njezini objekti predstavljaju. Uvedena je sredinom 20. stoljeća od strane Samuela Eilenberga i Saundersa MacLanea u njihovom radu o algebarskoj topologiji, a danas se gotovo svaka grana moderne matematike može opisati u smislu kategorija, što nam često otkriva duboke uvide i sličnosti između naizgled različitih područja matematike.[16] Osim formalizacije matematike, teorija kategorija se također koristi za formalizaciju mnogih drugih disciplina kao što su primjerice računarstvo, kvantna fizika, biologija, kemija i lingvistika, ali i mnoge druge. Teorija kategorija nam pomaže pronaći zajedničke karakteristike u tim disciplinama pomoću kojih ih možemo povezati. T. D. Bradley je u svom djelu *What Is Applied Category Theory* navela: "Volim zamisliti da je teorija kategorija kao šalica crne kave, dok su područja izvan čiste matematike poput svježeg vrhnja. Oboje su divni sami za sebe, ali miješanje ih čini izvanrednim napitkom." [2, str. 4]

Kako bi pobliže razumjeli teoriju kategorija, prvo se trebamo upoznati s njenim osnovnim konceptima. Ona se sastoji od dvije vrste koncepata: objekata i morfizama. Općenito, pojam kategorije pruža temeljan i apstraktan način opisivanja matematičkih objekata i njihovih odnosa, pri čemu morfizam povezuje dva objekta od kojih je jedan izvor, a drugi odredište morfizma. Često se kaže da je morfizam strelica koja preslikava svoj izvor u svoje odredište.[16] Morfizme je moguće komponirati ako je odredište prvog morfizma jednako izvoru drugog, a njihova kompozicija morfizama ima slična svojstva kao kompozicija funkcija (asocijativnost i postojanje identitetskih morfizama). Drugi temeljni koncept u teoriji kategorija je pojam funktora, koji igra ulogu morfizma između dvije kategorije. On preslikava objekte i morfizme iz jedne kategorije u objekte i morfizme druge kategorije na način da izvori budu preslikani u izvore i odredišta budu preslikana u odredišta. Treći temeljni koncept je prirodna transformacija koja se može promatrati kao morfizam između funktora. Na slici (*Slika 1.*) vidimo kako funktori povezuju dvije kategorije, dok njih povezuje prirodna transformacija.



Slika 1. Modificirana slika osnovnog koncepta teorije kategorija iz [1]

Jedna od karakteristika teorije kategorija je da zanemaruje detalje. Primjerice, u teoriji kategorija ne pokazujemo interes za elementima u našem skupu, ili je li naša grupa rješiva ili ne. Prednost takvog pogleda je ta da nam pažnja nije usmjerena na stvarne objekte, već na odnose između njih (morfizme). T. Leinster je u uvodu svog djela *Basic Category Theory* navodi: “Teorija kategorija pruža panoramski pogled na matematiku. S visine, detalji postaju nevidljivi, ali možemo primijetiti uzorke koje nije bilo moguće uočiti s razine tla.” [6, str. 1] Nijemac Martin Kuppe stvorio je kartu matematičkog krajolika koju je nazvao "Mathematistan." (*Slika 2.*), a “Obalu teorije kategorija" smjestio je u donji desni kut. Po meni možda i nije toliko bitna njena pozicija na karti, koliko je bitna činjenica da nam teorija kategorija omogućuje upravo taj pogled iz ptičje perspektive na cijeli krajolik kojeg je T. Leinster spomenuo. Gledajući “odozgo” vidimo kako različita područja matematike dijele zajedničke strukture, što postaje iznimno korisno kada želite riješiti problem u jednom području, na primjer topologiji, ali nemate odgovarajućih alata na raspolaganju. Prenoseći problem na drugo područje, na primjer, algebru, možete problem vidjeti iz drugačije perspektive i možda otkriti nove alate, a rješenje može postati mnogo jednostavnije.



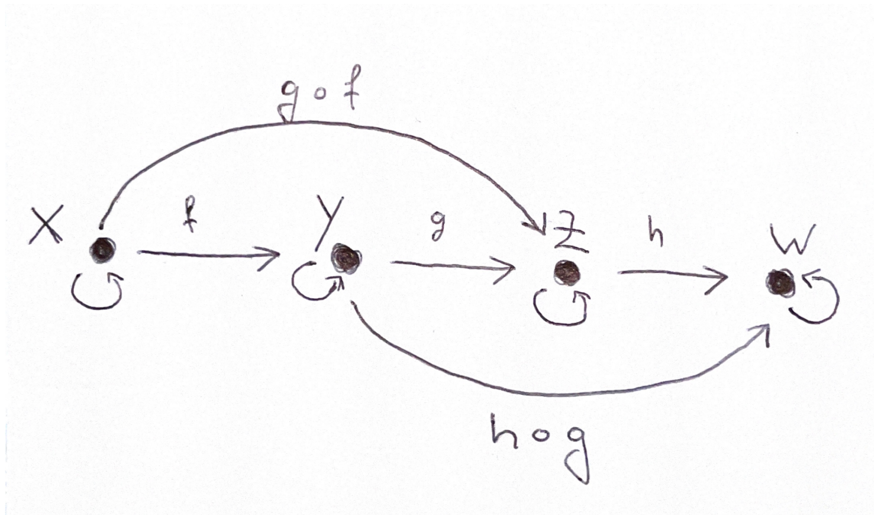
Slika 2. "Mathematistan" Martina Kuppea (Dostupno na: https://www.math3ma.com/blog/what-is-category-theory-anyway)

2.2. Kategorija u matematici

Kategorija je osnovni i apstraktan koncept u matematici koji igra ključnu ulogu u mnogim granama ovog znanstvenog područja. U ovom poglavlju ću pobliže objasniti što zapravo znači pojam "kategorija" u matematici i kako se ona precizno definira. Prije nego se dublje zaroni u definiciju kategorije, važno je razumjeti osnovne koncepte koji je čine, a to su: objekti, morfizmi, kompozicija i identiteti. Svaka kategorija sadrži skup objekata (brojevi, skupovi, grafovi, ili neki drugi matematički objekti) i skup morfizama ili strelica koji povezuju te objekte. Morfizmi predstavljaju veze ili transformacije između objekata. U kategoriji postoji pravilo koje definira kako se morfizmi komponiraju, što znači da se dva morfizma mogu kombinirati kako bi stvorili treći. Svaki objekt u kategoriji ima svoj identitetni morfizam, koji predstavlja "ništa se ne događa" transformaciju za taj objekt.

Kategorija također mora zadovoljiti određene aksiome[1], uključujući asocijativnost kompozicije i svojstvo identiteta. Jednostavan primjer je kategorija skupova, čiji su objekti skupovi, a strelice funkcije. Ključno svojstvo kategorije je da omogućuje matematičarima da istražuju i analiziraju različite strukture i odnose između objekata i morfizama na apstraktan način, što ju čini snažnim alatom u mnogim granama matematike, uključujući algebarsku topologiju, logiku, računarstvo i mnoge druge. Dvije kategorije smatraju se istima ako imaju istu kolekciju objekata, istu kolekciju strelica i istu asocijativnu metodu komponiranja bilo koje dvije strelice. U slučaju kada ne bi imale istu strukturu, dvije različite kategorije također se mogu smatrati "ekvivalentnima" u kontekstu teorije kategorija.[16]

[1] Aksiom je izjava koja se prihvaća kao istinita i ne zahtijeva dokazivanje unutar određenog matematičkog sustava ili teorije



Slika 3. Primjer kompozicije morfizama

Dosad smo pričali o kategorijama općenito, no ne bi bilo loše spomenuti i neke od bitnih i najčešće korištenih kategorija u matematici. Vjerojatno najbitnija je kategorija *Set*, koja se naziva kategorija skupova. Ona se oslanja na koncepte skupova i funkcija koji su dobro poznati i često korišteni u matematici. Osim kategorije *Set*, u matematici također imamo: kategoriju topoloških prostora (*Top*), kategoriju grafova (*Grph*), kategoriju grupa (*Grp*), kategoriju kategorija (*Cat*)...

Sada kada smo upoznali osnovne koncepte kategorije možemo ju i malo preciznije definirati. Za kategoriju *C* se kaže da se sastoji od objekata, morfizama, identiteta i pravila kompozicije, pritom zadovoljavajući zakone identiteta i asocijativnosti koje smo ranije nazvali aksiomima. Kategoriju *C* možemo definirati ovako:

- Kategorija se sastoji od skupa objekata $Ob(C)$
- Za svaki par objekata X i Y postoji skup $Hom(X,Y)$ čiji elementi se nazivaju morfizmi iz X u Y i pišemo $f : X \to Y$
- Za svaki objekt X u kategoriji C, postoji poseban morfizam Id_X, koji se naziva identitetni morfizam na X
- Za svaka tri objekta X, Y, Z u kategoriji C i njihove morfizme $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, postoji morfizam $g \circ f$ iz X u Z koji se naziva kompozicija od f i g

Kao što smo rekli ranije kategorija također mora zadovoljavati dva aksioma:

- Prvo je pravilo identiteta koje kaže da za svaki morfizam $f : X \to Y$ imamo $f \circ Id_X = f = Id_Y \circ f$
- Drugo je pravilo asocijativnosti koje kaže da ukoliko imamo tri morfizma $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$, vrijedi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2.3. Morfizam

U matematici, teorija kategorija predstavlja snažan okvir za istraživanje i razumijevanje različitih matematičkih struktura i njihovih odnosa. Ključni koncepti koji leže u srcu teorije kategorija te čine osnovnu građevinsku jedinicu kategorije su **objekti** i **morfizmi**.

Matematički objekt je apstraktni koncept koji se javlja u matematici. U uobičajenom jeziku matematike, objektima se smatra sve što je formalno definirano i s kojim se može provoditi deduktivno zaključivanje i matematički dokazi. Generalno gledajući, matematički objekt može biti vrijednost koja se može dodijeliti varijabli, te se s njom može sudjelovati u formulama. Neki od primjera matematičkih objekata su brojevi, skupovi, funkcije, izrazi, geometrijski objekti, transformacije drugih matematičkih objekata i prostori. U smislu kategorija, objekti su temeljni matematički entiteti unutar kategorije gdje se često označavaju slovima, kao što su A, B, C, X, Y, Z....

Morfizmi, s druge strane, su veze između objekata. U matematici, posebno u teoriji kategorija, morfizam predstavlja preslikavanje koje zadržava strukturu iz jedne matematičke strukture u drugu iste vrste. U teoriji skupova, morfizmi su funkcije; u linearnoj algebri, linearni operatori; u teoriji grupa, homomorfizmi grupa; u matematičkoj analizi i topologiji, neprekidne funkcije… U teoriji kategorija, pojam morfizma ima sličnu ideju: matematički objekti koji su uključeni ne moraju biti skupovi, a odnosi između njih mogu biti nešto drugo osim preslikavanja, ali morfizmi između objekata u danoj kategoriji moraju se ponašati slično kao preslikavanja, u smislu da moraju dopuštati asocijativnu operaciju sličnu kompoziciji funkcija. Možemo reći da je morfizam u teoriji kategorija apstrakcija homomorfizma.[2]

IME KATEGORIJE	OBJEKTI	MORFIZMI
Set	skup	funkcije
Grupa	grupe	grupni homomorfizam
Top	topološki prostor	neprekidne funkcije
Vect_K	Vektorski prostori iznad polja *k*	linearna transformacija
Meas	izmjerljivi prostori	izmjerljive funkcije
Poset	parcijalno uređeni skupovi	funkcije koje čuvaju poredak

Slika 4. Primjeri kategorija s njihovim pripadajućim objektima i morfizmima [4]

Ono što čini teoriju kategorija posebno moćnom jest koncept **strelica**. Strelice predstavljaju morfizme i označavaju se simbolom "→". One jasno pokazuju kako se jedan objekt transformira u drugi putem morfizma. Svakom morfizmu su pridružena dva objekta, izvor i odredište. Na primjer, ako imamo objekte X i Y te morfizam $\boldsymbol{f}$ koji ide iz X u Y, označavamo ga kao $f : X \to Y$, gdje strelica označava transformaciju ili preslikavanje. Strelice omogućuju da vizualno predstavimo kako se objekti i morfizmi

[2] U matematici, homomorfizam je preslikavanje između dvije algebarske strukture (kao što su grupe, prsteni, polja, ili drugi matematički objekti) koje sačuva određene operacije i relacije definirane na tim strukturama. Konkretno, homomorfizam zadovoljava svojstvo da operacije koje su definirane na jednoj strukturi ostaju očuvane u drugoj strukturi putem preslikavanja.

povezuju u kategoriji. Kategorija postaje mreža objekata i morfizama, gdje strelice povezuju objekte, a morfizmi čine veze među njima. Ovaj grafički pristup često olakšava razumijevanje i analizu složenih matematičkih struktura. Za mnoge uobičajene kategorije (primjerice kategoriju *Set*), objekti su skupovi, a morfizmi su funkcije iz jednog objekta u drugi objekt. Stoga se izvor i odredište morfizma često nazivaju domenom i kodomenom.

Kolekciju svih morfizama od X do Y označavamo kao $Hom_C(X,Y)$ ili jednostavno $Hom(X,Y)$ i nazivamo hom-skupom između X i Y. Izraz "hom-skup" ili “hom-set” je pomalo pogrešan naziv, jer kolekcija morfizama nije obavezno skup. Kategorija u kojoj je $Hom(X,Y)$ skup za sve objekte X i Y naziva se lokalno malom kategorijom. Budući da hom-setovi ne moraju biti skupovi, neki matematičari radije koriste izraz "hom-klasa".

Domena i kodomena zapravo čine dio informacije koja određuje morfizam. Na primjer, u kategoriji skupova, gdje su morfizmi funkcije, dvije funkcije mogu biti iste kao skupovi uređenih parova (mogu imati isti raspon), ali imati različite kodomene. Iz perspektive teorije kategorija, takve dvije funkcije su različite. Stoga mnogi autori zahtijevaju da “hom-klase” $Hom(X,Y)$ budu disjunktne. U praksi, to nije problem jer ako se ta disjunktnost ne očuva, može se osigurati dodavanjem domene i kodomene morfizmima.

-

2.4. Kompozicija morfizama i asocijativnost

U prošlom poglavlju razradili smo temu morfizama koji povezuju objekte unutar kategorije. Razumijevanje kako se ovi morfizmi "komponiraju" igra bitnu ulogu u analizi i istraživanju matematičkih struktura. Morfizmi su opremljeni djelomičnom binarnom operacijom zvanom **kompozicija**. Kompozicija morfizama je osnovni matematički operativni princip u teoriji kategorija. To je način na koji morfizmi (ili strelice) povezuju objekte i omogućavaju matematičarima da analiziraju odnose između objekata, a događa se kada imamo dva ili više morfizama koji se "spajaju" kako bi se stvorili novi morfizam.

Uzmimo primjerice f i g koji su morfizmi u kategoriji, gdje je $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$.

Tada se kompozicija ovih morfizama označava kao $g \circ f$ te predstavlja morfizam koji ide iz objekta *A* u objekt *C*. Ovaj novi morfizam rezultira time da se prvo primijeni *f* iz *A* u *B*, a zatim *g* iz *B* u *C*. Na primjer, ako razmatramo kategoriju skupova i funkcija (kategorija *Set*), morfizmi su funkcije, a kompozicija funkcija je standardna matematička operacija. Ako imamo funkciju *f* koja preslikava brojeve u njihove kvadrate, i funkciju *g* koja preslikava brojeve u njihove kubove, tada kompozicija $g \circ f$ preslikava brojeve u njihove šeste potencije. Također, kompozicija mora zadovoljavati dva aksioma. Prvi kaže da za svaki objekt *X* postoji morfizam $id_x : X \rightarrow X$ nazvan identitetni morfizam na *X* (kojeg ću objasniti u sljedećem poglavlju), dok se drugi odnosi na asocijativnost.

Asocijativnost je jedno od ključnih svojstava kompozicije morfizama u teoriji kategorija. Ovo svojstvo znači da redoslijed u kojem se vrši kompozicija ne utječe na konačni rezultat. Primjerice, za tri morfizma $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ i $h: C \rightarrow D$, asocijativnost se izražava kao: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$. Asocijativnost nam garantira konzistentnost operacija kompozicije i omogućava nam da komponiramo morfizme u bilo kojem redoslijedu. Asocijativnost je bitna u matematičkoj rigoroznosti jer osigurava da matematički izrazi imaju jednoznačno definirano značenje bez obzira na redoslijed operacija. To je također ključno za kategoriju jer nam omogućava da razmatramo kompleksne strukture i veze među objektima i morfizmima na dosljedan način.

Kompozicija morfizama često se prikazuje pomoću komutativnog dijagrama. U matematici, a posebno u teoriji kategorija, komutativni dijagram je dijagram takav da sve usmjerene staze u dijagramu s istim početnim i završnim točkama vode do istog rezultata. Kaže se da komutativni dijagrami igraju ulogu u teoriji kategorija sličnu ulozi koju jednadžbe igraju u algebri.

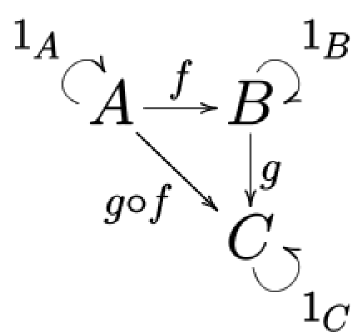
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Slika 5. Komutativni dijagram s objektima *X, Y, Z*, morfizmima *f, g,* $g \circ f$

2.5. Identitetni morfizam

U teoriji kategorija postoje posebni morfizmi unutar kategorije koji povezuju svaki objekt s njim samim na način da ne mijenjaju strukturu objekta, a zovemo ih **identitetni morfizmi**. Za svaki objekt *X* unutar kategorije, postoji identitetni morfizam id_x koji ide iz *X* u *X*. Ovaj morfizam je identičan ili neutralan u smislu da nema nikakvog učinka na objekt *X*. Možemo ga smatrati kao transformaciju objekta u kojoj se "ništa ne događa". Identitetni morfizmi igraju ključnu ulogu u održavanju strukture kategorije i osiguravaju dosljedno ponašanje morfizama. Oni osiguravaju asocijativnost operacije kompozicije morfizama. Kako smo objasnili u prošlom poglavlju, to znači da kompozicija morfizama ostaje konzistentna bez obzira na redoslijed kompozicije. Na primjer, za morfizme $f: X \to Y$ *i* $g: Y \to Z$, identiteti osiguravaju da $(g \circ f) \circ id_x = g \circ (f \circ id_x) = g \circ f$.

Identitetni morfizmi su jedinstveni za svaki objekt. To znači da za svaki objekt *X* postoji samo jedan identitetni morfizam id_x koji povezuje *X* s *X*. Kada primijenite identitetni morfizam na neki objekt, taj objekt ostaje nepromijenjen u smislu svoje strukture. Oni osiguravaju konzistentnost i jednoznačnost operacija u kategoriji. Bez njih, kompozicija morfizama ne bi bila dobro definirana. U kategoriji *Set*, koja se sastoji od skupova i funkcija između njih, identitetni morfizmi su identične funkcije. Na primjer, za bilo koji skup *X*, identitetni morfizam id_x preslikava svaki element iz *X* u sebe, zadržavajući time strukturu skupa.



Slika 6. Dijagram kategorije s identitetnim morfizmima 1_A, 1_B *i* 1_C

2.6. Monomorfizam i epimorfizam

U kontekstu apstraktne algebre ili univerzalne algebre, monomorfizam je injektivni homomorfizam. Monomorfizam iz X u Y često se označava notacijom $X \hookrightarrow Y$, a u općenitijem kontekstu teorije kategorija predstavlja lijevo skrativi[3] morfizam [13]. Morfizam $f\colon X \to Y$ naziva se monomorfizmom ako $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implicira $g_1 = g_2$ za sve morfizme $g_1, g_2\colon Z \to X$. Morfizam f ima lijevi inverz ili je rascjepivi monomorfizam ako postoji morfizam $g\colon Y \to X$ takav da $g \circ f = id_x$. Dakle, $f \circ g\colon Y \to Y$ je idempotentan[4] jer je

$$f \circ g \circ f \circ g = f \circ id_x \circ g = f \circ g.$$

Morfizmi s lijevim inverzima uvijek su monomorfizmi. U konkretnim kategorijama, funkcija koja ima lijevi inverz je injektivna. Stoga u konkretnim kategorijama monomorfizmi su često, ali ne i uvijek, injektivni.

$$Z \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

Slika 7. Prikaz monomorfizma

Epimorfizam je morfizam $f\colon X \to Y$ koji je desno skrativ na način da za sve objekte Z i sve morfizme $g_1, g_2\colon Y \to Z$ vrijedi: $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} Z$$

Slika 8. Prikaz epimorfizma

2.7. Izomorfizam

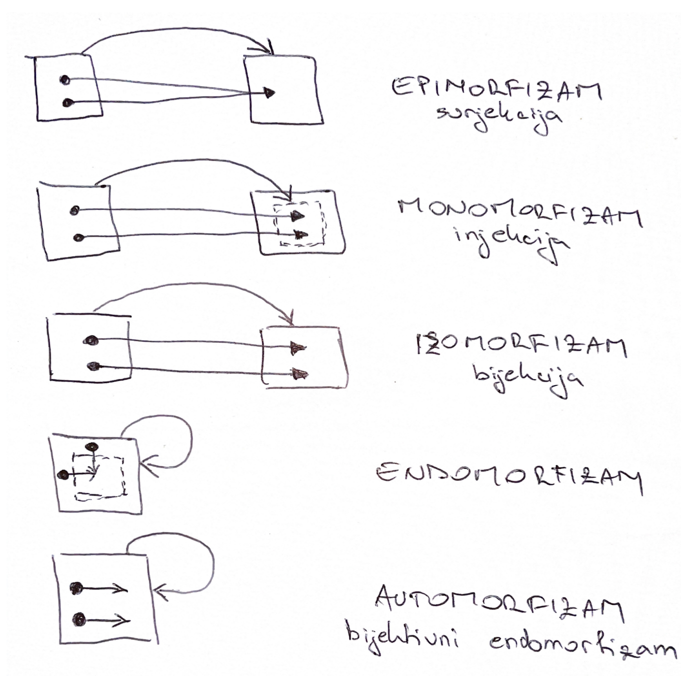
U matematici, izomorfizam opisuje preslikavanje koje očuva strukturu između

[3] U grupoidu (osnovnoj vrsti algebarske strukture), element *a* posjeduje svojstvo lijevog kraćenja, to jest lijevo je skrativ, ako vrijedi sljedeći uvjet:

[4] Izraz "idempotentan" koristi se u matematici i računarstvu kako bi označio svojstvo nekog operatora ili funkcije koja ostaje nepromijenjena ili daje isti rezultat kad se primijeni više puta na istu vrijednost.

dvije algebarske strukture iste vrste. Ovo preslikavanje može se obrnuti pomoću inverznog preslikavanja, pritom osiguravajući da su dvije strukture suštinski iste s obzirom na njihove osnovne karakteristike. Kada su dvije matematičke strukture izomorfne, to znači da između njih postoji izomorfizam, što omogućava da se identificiraju kao strukturalno ekvivalentne. Izraz "izomorfizam" potječe od drevnog grčkog jezika, gdje "isos" znači "jednako", a "morphe" znači "oblik”. Značaj izomorfizama leži u činjenici da izomorfni objekti dijele identične karakteristike, bez obzira na dodatne pojedinosti kao što su dodatna struktura ili imena objekata. S aspekta strukture, izomorfne strukture su nerazlikovane, i kaže se da su iste do na izomorfizam u matematičkom žargonu. Automorfizam je poseban tip izomorfizma koji preslikava strukturu na samu sebe. S druge strane, kanonski izomorfizam je izomorfizam koji je ili jedinstveno preslikavanje između dvije strukture ili se smatra prirodnijim na neki način od drugih izomorfizama.

Morfizam $f\colon X \to Y$ naziva se izomorfizmom ako postoji morfizam $g\colon Y \to X$ takav da $f \circ g = id_Y$ i $g \circ f = id_X$. Ako morfizam ima i lijevi inverz i desni inverz, tada su oba inverza jednaka, pa je *f* izomorfizam, a *g* se jednostavno naziva inverzom od *f*. Inverzni morfizmi, ako postoje, jedinstveni su. Inverz *g* također je izomorfizam, s inverzom *f*.



Slika 9. Slikovni prikaz različitih morfizama

2.8. Funktori

Funktori su još jedan od ključnih koncepata u teoriji kategorija i matematici općenito. Oni omogućavaju povezivanje i analizu kategorija, transformirajući objekte i morfizme iz jedne kategorije u drugu. U ovom poglavlju, pobliže ću objasniti što su funktori, kako ih definiramo i kako se koriste za povezivanje kategorija. Funktor je u jednostavnom rječniku preslikavanje između kategorija, a prvi put su razmatrani u algebarskoj topologiji gdje su algebarski objekti povezani s topološkim prostorima, a preslikavanja između tih algebarskih objekata povezana su s kontinuiranim preslikavanjima između prostora.

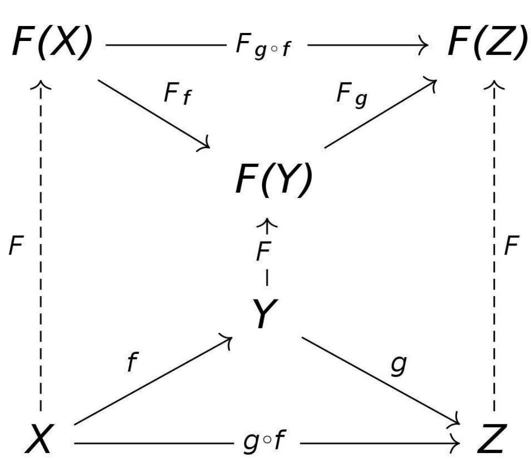
Na primjer, funktor F možemo definirati kao:

- Za svaku kategoriju C, postoji pripadajuća kategorija $F(C)$.
- Za svaki objekt X u C, postoji pripadajući objekt $F(X)$ u $F(C)$.
- Za svaki morfizam f: $X \to Y$ u C, postoji pripadajući morfizam $F(f): F(X) \to F(Y)$ u $F(C)$.

Funktor također mora zadovoljavati nekoliko aksioma:

- $F(id_x) = id_{F(X)}$ za svaki objekt X u C.
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ za sve morfizme f i g koji se mogu komponirati u C.

Ovi aksiomi osiguravaju da funktor zadržava strukturu kategorije i njezine operacije.



Slika 10. Primjer funktora F koji zadržava kompoziciju za sve morfizme

Funktori omogućavaju povezivanje i prelazak iz jedne kategorije u drugu. Na primjer, ako imamo kategoriju *C* koja predstavlja skupove i funkcije, a kategoriju *D* koja predstavlja grupu i homomorfizme, možemo definirati funktor koji prenosi skupove u grupe i funkcije u homomorfizme. Ovaj funktor ide iz kategorije *C* u kategoriju *D*, omogućavajući nam da primijenimo koncepte iz jedne kategorije na objekte i morfizme u drugoj. Funktori često omogućavaju matematičarima da prepoznaju sličnosti i analogije između različitih matematičkih struktura i disciplina. Na primjer, funktori omogućavaju usporedbu i proučavanje različitih algebarskih struktura, topoloških prostora, ili drugih matematičkih koncepata kroz prizmu njihovih zajedničkih karakteristika. “...svaka dovoljno dobra analogija teži postati funktorom.” [3, str. 6]

U kategoriji skupova i funkcija, možemo definirati funktor koji preslikava svaki skup u skup svih njegovih podskupova. Ovaj funktor zadržava *inkluziju*[5] podskupova i pruža nam mogućnost usporedbe različitih skupova putem njihovih inkluzija. U kategoriji grafova i morfizama grafova, možemo definirati funktor koji preslikava svaki graf u skup njegovih čvorova i bridova. Ovaj funktor omogućava usporedbu različitih grafova putem svojih čvorova i bridova.

[5] Riječ "inkluzija" označava proces uključivanja ili obuhvaćanja nečega ili nekoga u određeni skup, grupu ili okvir

2.9. Prirodne transformacije

Zaključno s ovim poglavljem završavamo s upoznavanjem ključnih koncepata teorije kategorija. Prirodne transformacije su posljednje od “velike trojke” teorije kategorija u koju, osim nje, spadaju kategorije i funktori. Možemo reći da je cijela priča oko teorija kategorija nastala upravo zbog prirodnih transformacija, jer su one bile, kako I. Spivak navodi u svom radu *Category Theory for Scientists*: “dovoljno konceptualno izazovne za potrebu formalizacije”. [4, str. 143]

One su način povezivanja i usklađivanja različitih funktora te omogućavaju još dublje razumijevanje odnosa između matematičkih struktura. Štoviše, one predstavljaju matematički koncept koji povezuje dva funktora i usklađuje njihove akcije na objekte unutar kategorija. Prirodna transformacija pruža način transformiranja jednog funktora u drugi, pri čemu se poštuje unutarnja struktura (tj. kompozicija morfizama) uključenih kategorija. Stoga se prirodna transformacija može smatrati "morfizmom funktora" te tvrdi da se određeno preslikavanje između funktora može dosljedno provesti kroz cijelu kategoriju.

Primjerice, neka su F i G dva funktora koji povezuju kategoriju C i D. Tada, prirodna transformacija η između F i G, često se označava kao $\eta: F \Rightarrow G$, mora zadovoljavati sljedeće uvijete:

- Za svaki objekt X u kategoriji C, η definira morfizam $\eta_X: F(X) \to G(X)$ u kategoriji D. Morfizam η_X se također naziva i komponenta od X.
- Za svaki morfizam $f: X \to Y$ u kategoriji C, komponenta mora biti takva da vrijedi: $\eta_X \circ F(f) = G(f) \circ \eta_Y$

Na slici (S*lika 11.*), $F(f)$ i $G(f)$ su morfizmi koje F i G generiraju iz morfizma f, i dijagram mora komutirati, što znači da je kompozicija η_X i $G(f)$ ista kao η_Y i $F(f)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Slika 11. Prikaz prirodne transformacije

2.9.1. Značajne prirodne transformacije

Identitetna prirodna transformacija

Identitetna prirodna transformacija definira se na sljedeći način: Za svaku kategoriju *C* i svaki funktor *F* iz *C* u *C*, postoji identitetna transformacija *Id: F => F* koja svakom objektu *X* u *C* pridružuje morfizam Id_X: *F(X) → F(X)* koji je identiteta na *F(X)*.

- Primjer: U kategoriji vektorskih prostora, identitetna transformacija svakom vektorskom prostoru *V* pridružuje identitetu Id_V koja pridružuje svakom vektoru iz *F(V)* njega samoga.

Inverzna prirodna transformacija

Inverzna prirodna transformacija definira se kao prirodna transformacija koja je inverzna drugoj prirodnoj transformaciji. Ako postoje dvije prirodne transformacije *α: F => G* i *β: G => F* takve da $\beta \circ \alpha = Id_F$ i $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_G$, tada su *α* i *β* inverzne prirodne transformacije.

- Primjer: U kontekstu grupa, ako postoji grupa *G* i njena inverzna grupa G^{-1}, tada postoji prirodna transformacija $\alpha: G \Rightarrow G^{-1}$ i $\beta: G^{-1} \Rightarrow G$ takve da $\alpha \circ \beta = Id_G$ i $\beta \circ \alpha = Id_G{}^{-1}$.

Prijelazna prirodna transformacija

Prijelazna prirodna transformacija je poseban slučaj prirodne transformacije u kojoj su svi komponentni morfizmi između funktora izomorfni.

- Primjer: U kategoriji vektorskih prostora, dva funktora *F* i *G* su prirodno izomorfna ako postoji prirodna transformacija α: $F => G$ koja je prijelazna, odnosno takva da su svi komponentni morfizmi α_X izomorfizmi.

Evaluacijska prirodna transformacija

Evaluacijska prirodna transformacija često se koristi u kontekstu kategorije funkcija. Ako imamo kategoriju *C* čiji su objekti funkcije iz neke domene u kodomenu, tada evaluacijska transformacija *Eval: Hom(C, -)* => - preslikava svaku funkciju *f* u svoju vrijednost *f(a)* na objektu *a* iz *C*.

- Primjer: U kategoriji funkcija, evaluacijska prirodna transformacija Eval pridružuje svakoj funkciji f njezinu vrijednost f(a) za fiksan a.

Funktorska prirodna transformacija

Funktorska prirodna transformacija je transformacija između funktora koji preslikavaju između dvije različite kategorije. Na primjer, ako imamo funktore $F: C \to D$ i $G: C \to D$ te prirodnu transformaciju α: $F => G$, tada je α funktorska prirodna transformacija.

- Primjer: U kontekstu topoloških prostora, ako imamo funktor koji preslikava topološki prostor u njegovu fundamentalnu grupu, a drugi funktor koji preslikava topološki prostor u svoj prvi singularni kompleks, tada je prirodna transformacija između tih funktora funktorska prirodna transformacija.

3. Primjena teorije kategorija

Nakon što smo se upoznali s osnovnim konceptima teorije kategorija, došlo je vrijeme da pažnju posvetimo i njenoj primjeni. U ovom poglavlju, pokušat ću razbiti apstraktnu prirodu primjene teorije kategorija, istražiti koje discipline koriste “moć” teorije kategorija i pokušati odgovoriti na pitanje je li nam teorija kategorija pomogla riješiti neke veće probleme. Cilj ovog dijela rada je odmaknuti se od samih definicija i približiti se teoriji kategorija na primjerima iz stvarnog života. T. D. Bradley je u svom blogu *What Is Category Theory Anyway?* predložila vrlo zanimljiv pogled na cijelu priču oko teorije kategorija: “Shvaćam da kategorije mogu biti poput inćuna: neki ih ljudi vole, neki ne vole, a neki ih zavole s vremenom. Istina je da teorija kategorija možda neće pomoći da pronađete delta za vaš epsilon, ili odredite je li vaša grupa reda 520 prosta, ili odredite rješenje za vašu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Za te napore moramo stvarno stati nogama na zemlju. Ali kategorizirano razmišljanje može poslužiti kao svjetionik - može ojačati vašu intuiciju, oštriti vaš uvid - dok lutate po ćoškovima i zakutcima svojih omiljenih matematičkih područja. (Kako bi Freeman Dyson rekao, trebamo i ptice i žabe da potaknemo matematički napredak!)” [1]

3.1. Primjene u računarstvu

U računarstvu, posebno u formalnoj semantici programskih jezika, teorija kategorija ima vidljivo značajnu ulogu. Kroz kategorijalne koncepte, kao što su funktori i monade[6], može se precizno definirati značenje programskog jezika, olakšavajući analizu i verifikaciju programa. Također, funktori su ključni za razvoj funkcijskog programiranja, pružajući apstraktne načine za manipulaciju podacima i transformaciju funkcija.

Teorija kategorija u računarstvu je apstraktan okvir koji omogućava dublje razumijevanje i analizu različitih aspekata programiranja, računalnih jezika i računalnih znanosti općenito. Kroz ovaj okvir, računarstvo postaje mnogo više od pukog kodiranja i omogućava inženjerima i znanstvenicima računarstva da razmišljaju o konceptima i

[6] Monada je apstraktni konstruktor tipa podataka koji se koristi za predstavljanje izračuna u funkcijskom programiranju

strukturama koje leže u osnovi računalnih sustava. Teorija kategorija ima snažan utjecaj na funkcijsko programiranje, paradigmu koja se temelji na matematičkim funkcijama i deklarativnom programiranju. Koncepti iz teorije kategorija, poput funktora, monada i prirodnih transformacija, često se koriste za modeliranje i analizu funkcijskih programskih jezika. Na primjer: u Haskellu, monade se koriste za rukovanje efektima u čistom funkcijskom okruženju. Monadu se može interpretirati kao kategoriju, a njeni zakoni, poput zakona asocijativnosti, odražavaju osnovna svojstva monada u teoriji kategorija. I. Spivak je u svom radu *Category Theory For Scientists* ulogu monada u računarstvu objasnio ovako: “Monade su nastale kako bi pružile snažnu apstrakciju koja otvara vrata takvim ne-funkcijskim operacijama, a da pri tome ne prisiljava programera da napusti rajski vrt teorije kategorija.”[4, str. 142] Također, teorija kategorija igra ključnu ulogu u definiranju i razumijevanju tipova podataka u programiranju. Tipovi se često modeliraju kao objekti u kategoriji, a funkcije između tipova kao morfizmi. Na primjer u jezicima poput Pythona, tipovi podataka se mogu predstaviti kao objekti kategorije, a funkcije koje preslikavaju između tipova kao morfizmi. Teorija kategorija omogućava razumijevanje kako tipovi međudjeluju i kako ih možemo komponirati.

Teorija kategorija ima dubok utjecaj na računalnu semantiku, disciplinu koja proučava značenje računalnih programa i njihovih izračuna. Kategorije se često koriste za formalizaciju semantičkih modela programskih jezika. Kao primjer možemo uzeti domene i koelement[7] domena koji se koriste u semantici kako bi se formalno opisali izračuni u programima. Ovi koncepti su kategorijalni u prirodi i omogućavaju precizno opisivanje interakcija između izračuna. Teorija kategorija također ima primjene u računalnoj arhitekturi, posebno u analizi i optimizaciji računalnih sustava. Kategorije se koriste za modeliranje i analizu podatkovnih tokova i komunikacije između računalnih komponenti. Kao primjer možemo uzeti kategorijalni model poput modela konkretnih domena koji se koristi za analizu performansi i sigurnosti računalnih sustava. Kroz teoriju kategorija možemo razumjeti kako se podaci prenose i obrađuju unutar računalnih sustava. Teorija kategorija igra važnu ulogu u razvoju programskih jezika i prevoditelja. Kategorije se koriste za modeliranje apstraktnih sintaksnih stabala,

[7] Koelementi su suprotnost elementima. Umjesto da se bave elementima u domeni (izvoru), koelementi se bave elementima u kodomeni (cilju) funkcije. Koelement je "element" ili član kodomene koji se preslikava u određeni element domene funkcijom.

semantičkih analiza i generiranja koda. Na primjer, u konstrukciji jezika poput Haskell, teorija kategorija pruža temelj za razvoj tipovnih sistema, modula i generiranja efikasnog koda.

3.2. Teorija kategorija u algebri

Algebarska geometrija je polje koje povezuje algebarske strukture s geometrijskim konceptima. Teorija kategorija igra važnu ulogu u razumijevanju tih veza kroz koncept shema. Shema se može shvatiti kao generalizacija algebarskog objekta, a teorija kategorija omogućava formalnu analizu njihovih transformacija, izomorfizama i struktura, čime se otvaraju vrata dubljem razumijevanju algebarske geometrije. Kategorije pružaju apstraktan okvir za proučavanje algebarskih struktura. Umjesto da razmišljamo o specifičnim operacijama i svojstvima svake strukture zasebno, možemo ih analizirati unutar istog matematičkog okvira koristeći kategorije. Izdvojio bih nekoliko primjera kako se kategorije primjenjuju na algebarske strukture. Za početak imamo teoriju grupa koja kaže da se grupa može definirati unutar kategorije. U ovom slučaju, objekti kategorije su grupe, a morfizmi su homomorfizmi između grupa. Kroz proučavanje homomorfizama i svojstava grupa u kategoriji, matematičari imaju mogućnost izvoditi dublje rezultate o grupama i njihovim strukturama. Drugi primjer je teorija prstena gdje kategorija prstena sadrži prstene kao objekte i homomorfizme između prstena kao morfizme. Primjenom teorije kategorija na prstene, matematičari su razvili koncepte kao što su kvocijenti prstena po idealima i mnoge druge algebarske konstrukcije.

Koristiti kategorije za proučavanje algebarskih struktura donosi nekoliko prednosti. Jedna od prednosti je zasigurno analiza struktura unutar kategorija. Ona nam omogućava izvođenje apstraktnih rezultata koji se kasnije primjenjuju na širok spektar algebarskih objekata. Također jedna od prednosti proučavanja algebarskih struktura je razvoj kategorijalne logike, koja se bavi formalizacijom različitih matematičkih teorija unutar kategorija.

3.3. Teorija kategorija u topologiji

Teorija kategorija igra ključnu ulogu u topologiji, matematičkoj disciplini koja proučava prostorne strukture i njihove svojstvene osobine. Kroz pristup teorije kategorija, matematičari su u mogućnosti dublje razumjeti topološke prostore i njihove transformacije. U teoriji kategorija, topološki prostori se često promatraju kao objekti u kategoriji. Svaki topološki prostor postaje objekt, a homomorfizmi (transformacije koje sačuvaju topološka svojstva) postaju morfizmi u toj kategoriji. Koristeći teoriju kategorija, matematičari mogu analizirati različite topološke prostore kao objekte unutar ove kategorije i istraživati kako se transformacije između tih prostora ponašaju kao morfizmi. Na primjer, možemo razmotriti kako se topološki prostori deformiraju ili povezuju putem homomorfizama i proučiti njihove invarijante, poput homoloških grupa, kako bismo razumjeli njihove topološke osobine. Funktori su snažan alat u topologiji koji omogućava usporedbu topoloških prostora i njihovih svojstava. Na primjer, funktori mogu preslikati topološke prostore u algebarske strukture ili druge matematičke objekte kako bi se lakše analizirali te se koriste za povezivanje topoloških koncepta s drugim matematičkim disciplinama.

3.4. Filozofija i teorija kategorija

Teorija kategorija je matematički okvir koji, osim svojih matematičkih primjena, nosi i duboke filozofske implikacije te postavlja pitanje prirode matematike i njezinih temelja. Klasično pitanje u filozofiji matematike bilo je *jesu li matematički objekti stvarni entiteti ili su proizvod ljudske apstrakcije*. Teorija kategorija sugerira da matematika nije samo opis stvarnosti, već i alat za strukturiranje našeg razumijevanja stvarnosti. Objekti i morfizmi u kategorijama mogu se interpretirati kao načini organiziranja i povezivanja različitih aspekata stvarnosti. Također, teorija kategorija postavlja pitanja o jezičkoj komunikaciji i semantici. Kroz kategorijalne koncepte, možemo razmotriti kako jezik prenosi značenje i kako se različiti jezici mogu uspoređivati i interpretirati. Ova filozofska implikacija povezana je s teorijama semantike i hermeneutike koje istražuju procese interpretacije i komunikacije. U filozofiji znanosti, teorija kategorija igra važnu ulogu u razumijevanju načina na koji se različite znanstvene discipline međusobno povezuju. Ona potiče interdisciplinarni pristup u znanstvenom istraživanju, omogućujući znanstvenicima da razmišljaju o zajedničkim konceptima i strukturama koje se pojavljuju u različitim disciplinama. Teorija kategorija otvara pitanja o prirodi apstrakcije i načinima na koje ljudi razumiju i modeliraju složene koncepte. Koncepti poput funktora i prirodnih transformacija omogućavaju matematičarima da apstrahiraju i uspoređuju različite matematičke strukture. Ovo postavlja pitanja o tome kako ljudski um konstruira i manipulira apstraktnim konceptima u svim aspektima života. U kontekstu suvremene logike, teorija kategorija pomaže u razumijevanju odnosa između različitih logičkih sustava i formalnih jezika, dok kategorijalna semantika pruža novi način za razmišljanje o semantici i logičkoj strukturi jezika, postavljajući pitanja o prirodi logičke istine i zaključivanja.

3.5. Primjene u fizici, biologiji i lingvistici

Teorija kategorija nije ograničena samo na matematiku i računarstvo, već ima duboke primjene i u fizici. U kvantnoj teoriji polja, kategorijalni pristup omogućava modeliranje i analizu kvantnih pojava. Također, teorija kategorija pomaže u razumijevanju topoloških stanja materijala i topoloških faznih tranzicija, pružajući novu perspektivu na kvantnu mehaniku i kondenzirane materijale.

U biologiji, teorija kategorija se primjenjuje na modeliranje bioloških mreža i interakcija među staničnim komponentama. Ova primjena omogućava bolje razumijevanje složenih bioloških procesa i njihovih dinamičkih interakcija.

U lingvistici, teorija kategorija pomaže u formalnom opisivanju semantičkih veza i relacija u jeziku, doprinoseći analizi jezičnih struktura. T. D. Bradley je lijepo razradila tu temu u svom djelu *What is applied category theory?,* gdje je detaljno opisala kako možemo gramatiku i značenje riječi učiniti matematički smislenim korištenjem teorije kategorija. Iako je sam pristup podosta kompliciran i pomalo apstraktan, glavna ideja joj je bila pokazati da smisleno značenje rečenice može biti određeno kompozicijom značenja pojedinih riječi u rečenici i gramatičkih pravila koja ih povezuju.

3.6. Budućnost primjene teorije kategorija

Iako možda sam termin primijenjena teorija kategorija sam po sebi zvuči dosta odbojno zbog svoje apstraktne prirode, budućnost teorije kategorija obećava značajnu ulogu u razvoju matematike i njenim primjenama u različitim disciplinama. Mislim da teorija kategorija na prvi pogled predstavlja nešto novo i donekle nepovezano s matematikom koju znamo, no ubrzo nakon upoznavanja s osnovnim konceptima, shvatimo da nam ona pruža pogled iz druge perspektive, koji nam izrazito olakšava rješavanje određenih problema. Ova apstraktna grana matematike, koja je nekoć bila smatrana izuzetno teško shvatljivom, danas sve više pronalazi primjenu u raznim područjima i postaje odabrani jezik u mnogim naprednim matematičkim tečajevima i istraživanjima. D. I . Spivak je u svom radu *Category Theory for Scientists* rekao sljedeće za budućnost teorije kategorija. “Tijekom svog tog vremena, teorija kategorija redovito je viđena od strane velikog dijela matematičke zajednice kao previše apstraktna. No, u 21. stoljeću, napokon je dobila zasluženo poštovanje unutar šire matematičke zajednice. Postala je odabrani jezik za kolegije iz algebre i topologije na razini diplomskih studija i, prema mom mišljenju, nastavit će se uspostavljati kao osnovni okvir u kojem se matematika obavlja. (…) prema mom mišljenju, tek smo na početku njezinog upuštanja u znanstvenu metodologiju. Teorija kategorija izmišljena je kao most i nastavit će služiti u toj ulozi.”[4, str. 10] Spivakova perspektiva baca svjetlo na daljnje napredovanje teorije kategorija te naglašava njezinu sveprisutnu važnost u budućim matematičkim istraživanjima i njezin potencijal za revolucionarne primjene izvan matematike.

4. Napredni koncepti

4.1. Ekvivalentnost kategorija

Ekvivalentnost kategorija je također važan koncept u teoriji kategorija koji se često koristi kako bi se razumjele dublje veze između različitih matematičkih teorija, a funktori igraju ključnu ulogu u ostvarivanju tih ekvivalencija. U teoriji kategorija, ekvivalentnost kategorija je veza između dviju kategorija koja uspostavlja da su te kategorije "u suštini iste". Postoji mnogo primjera kategoričkih ekvivalencija iz mnogih područja matematike. Uspostavljanje ekvivalencije uključuje dokazivanje snažnih sličnosti između relevantnih matematičkih struktura. U nekim slučajevima, ove strukture se mogu činiti nepovezanima na površnoj ili intuitivnoj razini, što čini ovu ideju prilično moćnom: omogućuje "prevođenje" teorema između različitih vrsta matematičkih struktura, znajući da se bitno značenje tih teorema čuva tijekom prevođenja. Ako je kategorija ekvivalentna suprotnoj drugoj kategoriji, tada se govori o dualnosti kategorija i kaže se da su dvije kategorije dualno ekvivalentne. Ekvivalencija kategorija sastoji se od funktora između uključenih kategorija, koji mora imati inverzni funktor. Međutim, za razliku od situacije uobičajene za izomorfizme u algebarskom okruženju, kompozicija funktora i njegovog inverznog funktora nije nužno identičko preslikavanje. Umjesto toga, dovoljno je da svaki objekt bude prirodno izomorfan svojoj slici pod ovom kompozicijom. Stoga se funktori mogu opisati kao "inverzi do izomorfizma". Postoji i koncept izomorfizma kategorija gdje se zahtijeva stroži oblik inverznog funktora, ali taj koncept je znatno manje praktičan od koncepta ekvivalencije.

Ekvivalentnost kategorija se odnosi na poseban odnos između dviju kategorija, C i D, u kojem su te dvije kategorije "ekvivalentne" na neki način. Primjerice, dvije kategorije C i D smatraju se ekvivalentnim ako postoji par funktora $F: C \to D$ i $G: D \to C$, zajedno s prirodnim transformacijama $\eta: id_C \Rightarrow G \circ F$ i $\varepsilon: F \circ G \Rightarrow id_D$, gdje su id_C i id_D identitetni funktori za C i D redom. Ovaj koncept sugerira da su kategorije C i D "iste" u određenom smislu, jer postoji način za njihovo prevođenje pomoću funktora F i G te prirodnih transformacija. To znači da, iako se mogu razlikovati po svojim objektima i morfizmima, sadrže istu matematičku strukturu i omogućavaju isto razmišljanje i zaključivanje. Funktori igraju ključnu ulogu u ostvarivanju ekvivalentnosti kategorija. Funktor $F: C \to D$ preslikava objekte i morfizme iz kategorije C u kategoriju D. Funktor $G: D \to C$ radi obratno. Prirodnim transformacijama η i ε, funktori F i G čine ekvivalentnost između kategorija C i D. Prirodne transformacije η i ε su bitne jer pomažu očuvati strukturu i kompatibilnost između funktora F i G. Transformacija η omogućava povezivanje identiteta na C sa funktorom $G \circ F$, dok transformacija ε omogućava povezivanje identiteta na D sa funktorom $F \circ G$. Ova svojstva omogućavaju glatko prevođenje između kategorija C i D.

4.2. Yonedaova lema

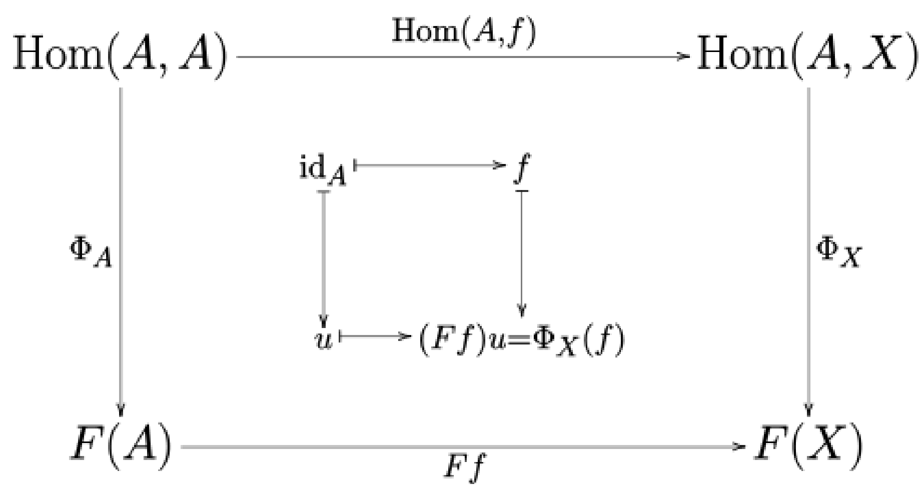
Yonedaova lema je vjerojatno najvažniji rezultat u baznoj teoriji kategorija. Nazvana je po japanskom matematičaru Nobuo Yonedau koji ju je formulirao u ranim 1950-ima, a objavljena je 1954. godine. Nobuo Yoneda nije bio jedini koji je radio na razvoju teorije kategorija u to vrijeme, ali njegovo ime ostaje snažno povezano s ovom temom zbog ključnih doprinosa koje je dao. Nakon objavljivanja, Yonedaova lema postala je temeljni teorem u teoriji kategorija i ima široku primjenu u matematici i računarstvu. Yonedaova lema je ključni teorem u teoriji kategorija, koja ima duboke implikacije u razumijevanju strukture i povezanosti različitih matematičkih objekata. Ova lema[8] pruža moćno sredstvo za analizu kategorija i funktora unutar njih te se često koristi za dublje razumijevanje matematičkih koncepata i njihove međusobne povezanosti.

Osnovna ideja Yonedaove leme leži u promatranju kako se objekti u nekoj kategoriji povezuju s funktorima iz te kategorije u kategoriju skupova (Set). Umjesto izravnog proučavanja objekata, Yonedaova lema predlaže proučavanje kako se objekti "prikazuju" ili "reprezentiraju" putem funktora. Ovo se često naziva "Yonedaovom perspektivom" ili "Yonedaovim pogledom". Na primjer, Yonedaova lema tvrdi da za svaki objekt X u kategoriji C postoji jedinstveni funktor, nazvan "Yonedaov funktor" ili

[8] U matematici, riječ "lema" označava manji rezultat, tvrdnju ili teorem koja se koristi kao pomoćna ili međukorak u dokazu većeg teorema. Leme se koriste kako bi se razbili složeni dokazi na manje korake ili kako bi se usmjerili na ključne ideje. Termin "lema" dolazi iz latinskog jezika i znači "premisa" ili "pretpostavka".

"hom-funktor" *Hom(-, X)* iz *C* u Set, koji preslikava svaki objekt *A* u skup *Hom(A, X)* svih morfizama iz *A* u *X*. Ovo preslikavanje je prirodno u smislu da se odnosi na morfizme između objekata u *C*. Drugim riječima, ako imamo morfizam *f: A → B* u *C*, tada postoji povezanost između morfizama *Hom(B, X)* i *Hom(A, X)* putem Yonedaovog funktora, gdje se f preslikava na određeni način u *Hom(B, X)* na temelju njegove interakcije s *Hom(A, X)*.

Iako je Yonedaova lema već ključni teorem u teoriji kategorija, njezina budućnost obećava još dublje razumijevanje i primjene. Sve joj je veća primjena u računarstvu, posebno u funkcijskom programiranju i programskim jezicima visokog nivoa, dok razumijevanje odnosa između objekata i morfizama pomaže u optimizaciji i analizi programa.



Slika 12. Ovaj komutativni dijagram prikazuje kako je prirodna transformacija Φ potpuno definirana s $\Phi_A(id_A) = u$ budući da za svaki morfizam $f: A \rightarrow X$ vrijedi $\Phi_X(f)=(Ff)u$.

5. Zaključak

U ovom radu predstavili smo teoriju kategorija kao snažan alat koji povezuje različite znanstvene discipline, dok njezina primjena pomaže razumijevanju dubokih veza između apstraktnih matematičkih struktura i njihovih konkretnih primjena u svijetu. Kroz rad objasnili smo suštinu svih bitnih bazičnih koncepata teorije kategorija, uključujući same kategorije, morfizme, funktore i prirodne transformacije. Ti koncepti omogućavaju nam povezivanje i razmjenu koncepata između različitih znanstvenih područja.

Osim upoznavanja osnovnih koncepata teorije kategorija, istražili smo u kojim sve znanstvenim disciplinama ju primjenjujemo. Kroz raznovrsne primjene, teorija kategorija pokazala se kao nevjerojatan resurs za razvoj novih konceptualnih okvira, analitičkih metoda i inovacija širom znanstvenog spektra. Prilikom istraživanja primjene, najviše pažnje je posvećeno primjeni u računarstvu, gdje pronalazimo širok raspon primjena, od funkcijskog programiranja do računalne semantike i računalne arhitekture. Tu smo primijetili kako teorija kategorija omogućava dublje razumijevanje i analizu računalnih sustava i programskih jezika te potiče razvoj inovativnih tehnika i alata u svijetu računarstva. Samim time računarstvo postaje više od pukog kodiranja te postaje interdisciplinarna znanstvena disciplina koja istražuje duboke koncepte i strukture iza računalnih tehnologija.

Teorija kategorija zamišljena je kao most između koncepta i primjene i nastavit će se razvijati u tom smjeru, a njena važnost i potencijal su prepoznati kod mnogih matematičara. Budući razvoj računarstva potiče nas na kategorijalno razmišljanje i zaključak kako vrijeme pune primijene teorije kategorija tek dolazi. Također mislim da privlačnost teorije kategorija uvelike ovisi o vašem cilju kao matematičaru. Mene osobno izuzetno privlači jer volim učiti o povezanosti između naizgled nepovezanih stvari. To je zapravo ono što me u početku privuklo teoriji kategorija, ideja da postoje skrivene veze među njima koje treba otkriti.

6. Popis literature

1. Bradley T. D., 2017, What Is Category Theory Anyway?, https://www.math3ma.com/blog/what-is-category-theory-anyway, (pristupljeno 3. rujna 2023.)
2. T. D. Bradley, What Is Applied Category Theory?, New York, Cuny Graduate Center, 2018, Dostupno na: https://arxiv.org/abs/1809.05923, (pristupljeno 3. rujna 2023.)
3. J. C. Baez, Quantum quandaries: A Category Theoretic Perspective, Riverside, Department of Mathematics, University of California, 2004, Dostupno na: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0404040, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
4. D. I. Spivak, Category Theory for the Scientists, Massachusetts, The MIT Press, 2013, Dostupno na: https://arxiv.org/abs/1302.6946, (pristupljeno 1. rujna 2023.)
5. Fong B. i D. I. Spivak, Seven Sketches in Compositionality: An Invitation to Applied Category Theory, Cambridge, Cambridge University Press, 2019, Dostupno na: https://arxiv.org/abs/1803.05316, (pristupljeno 1. rujna 2023.)
6. T. Leinster, Basic Category Theory, Cambridge, Cambridge University Press, 2014, Dostupno na: https://arxiv.org/abs/1612.09375, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
7. Mathematics for Physics, Adam Marsh, 2018, Dostupno na: https://www.mathphysicsbook.com/mathematics/mathematical-structures/defining-mathematical-structures-and-mappings/, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
8. Stanford Encyclopedia of Philosophy, Category Theory, Dostupno na: https://plato.stanford.edu/Archives/spr1999/entries/category-theory/, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
9. Wikipedia, Category Theory, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
10. Wikipedia, Equivalence_of_categories, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_of_categories, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
11. Wikipedia, Functor, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Functor, (pristupljeno 5. rujna 2023.)

12. Wikipedia, Isomorphism, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Isomorphism, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
13. Wikipedia, Monomorfizam, Dostupno na: https://hr.wikipedia.org/wiki?curid=661638 (pristupljeno 15. rujna 2023)
14. Wikipedia, Morphism, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Morphism, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
15. Wikipedia, Natural Transformation, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_transformation, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
16. Wikipedia, Yoneda lemma, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Yoneda_lemma, (pristupljeno 5. rujna 2023.)
17. Wikiwand, Kategorija_(matematika), Dostupno na: https://www.wikiwand.com/sr/Kategorija_(matematika), (pristupljeno 15. rujna 2023)

7. Slike i dijagrami

1. Prikaz osnovnog koncepta teorije kategorija
https://www.math3ma.com/blog/what-is-category-theory-anyway 3
2. "Mathematistan" njemca Martin Kupea
https://www.math3ma.com/blog/what-is-category-theory-anyway 4
3. Primjer kompozicije morfizama
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Commutative_diagram_for_morphism.svg 6
4. Primjeri kategorija s njihovim pripadajućim objektima i morfizmima
https://www.math3ma.com/blog/what-is-category-theory-anyway 8
5. Komutativni dijagram s objektima X, Y, Z, morfizmima $f, g, g \circ f$
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Commutative_diagram_for_morphism.svg 10
6. Diagram kategorije s identitetnim morfizmima 1_A, 1_B *i* 1_C
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Category_SVG.svg 11
7. Primjer monomorfizma
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Monomorphism_scenarios.svg 12
8. Primjer epimorfizma
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Epimorphism_scenarios.svg 12
9. Slikovni prikaz različitih morfizama
https://www.mathphysicsbook.com/mathematics/mathematical-structures/defining-mathematical-structures-and-mappings/ 13
10. Primjer funktora F koji zadržava kompoziciju za sve morfizme
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Commutative_diagram_of_a_functor.svg 14
11. Primjer prirodne transformacije
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Natural_Transformation_between_two_functors.svg 17
12. Yoneda lemma
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Yoneda_lemma_cd.svg 27

8. Popis simbola i mjernih jedinica

1. f — Morfizam f
2. $\rightarrow$ — Transformacija ili preslikavanje
3. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — Kolekcija svih morfizama od X do Y
4. $\hookrightarrow$ — Preslikavanje monomorfizma
5. $g \circ f$ — Kompozicija između f i g
6. Id_x — Identitetni morfizam od X
7. C, D — Kategorija C, D
8. F, G — Funkfor F, G
9. η — Prirodna transformacija
10. $\eta_{X,} \eta_Y$ — Komponenta od X, Y

9. Sažetak

Ovaj završni rad pod nazivom *Primijenjena teorija kategorija* bavi se analizom osnovnih koncepata teorije kategorija i njezine primjene. Rad sadrži uvod u svijet teorije kategorija u kojem su definirani i objašnjeni koncepti kategorija, morfizama, funktora i prirodne transformacije. U ovom radu istraženi su osnovni koncepti i napredni aspekti teorije kategorija. Počevši od osnovnih definicija, rad je detaljno objasnio koncepte identitetnih morfizama i kompoziciju morfizama, koji su ključni za razumijevanje struktura kategorija. Također, u radu su istaknute bitne vrste prirodnih transformacija koje se koriste za povezivanje različitih funktora unutar kategorija. Nadalje, rad je istražio napredne koncepte teorije kategorija kao što su Yonedaova lema i ekvivalentnost kategorija, koncept koji se odnosi na usporedbu i ekvivalenciju različitih kategorija. Osim definicije i opisa bitnih koncepata, cilj rada bio je istražiti primjenu teorije kategorije u različitim disciplinama. Pokazano je kako je u posljednjih nekoliko godina ova apstraktna grana matematike doživjela veliki napredak i priznanje u širokom spektru znanstvenih područja uključujući algebru, računarstvo, filozofiju i mnoge druge. Metodologija istraživanja u ovom radu uključuje temeljito proučavanje teorije kategorija kroz analizu literature i razmatranje primjera iz stvarnog svijeta. Tijekom rada, priložene su slike komutativnih dijagrama pojedinih koncepata teorije kategorija kako bi se olakšalo njihovo razumijevanje. Prilikom istraživanja naglasak je bio stavljen na razradu osnovnih koncepata te njihovu ulogu i primjenu u različitim matematičkim i znanstvenim kontekstima. U konačnom zaključku, teoriju kategorija treba shvaćati kao most između koncepta i primjene koji služi kao snažan alat za razumijevanje i povezivanje širokog spektra koncepata. Njen drugačiji pogled na određeni problem olakšava analizu i dublje razumijevanje samog problema, a njena prava moć i potencijal za daljnji razvoj u različitim disciplinama tek počinju dolaziti do izražaja.

Ključne riječi: primijenjena teorija kategorija, kategorije, morfizam, kompozicija morfizama, funktor, prirodna transformacija

Summary

This undergraduate thesis, entitled *Applied Category Theory*, deals with the analysis of the basic concepts of category theory and its applications. The thesis contains an introduction to the world of category theory in which the concepts of categories, morphisms, functors and natural transformations are defined and explained. It explores the basic concepts and advanced aspects of category theory. Starting with basic definitions, the thesis explained in detail the concepts of identity morphisms and the composition of morphisms, which are crucial for understanding category structures. It also highlights important types of natural transformations that are used to connect different functors within categories. Furthermore, the thesis explored advanced concepts of category theory such as the Yoneda Lemma and category equivalence, a concept related to the comparison and equivalence of different categories. In addition to the definition and description of essential concepts, the aim was to investigate the application of category theory in different disciplines. It is shown how in the last few years this abstract branch of mathematics has experienced great progress and recognition in a wide range of scientific fields including algebra, computing, philosophy and many others. The research methodology includes a thorough study of category theory through literature analysis and consideration of real-world examples. During the work, pictures of commutative diagrams of certain concepts of category theory are attached to facilitate their understanding. During the research, emphasis was placed on the development of basic concepts and their role and application in different mathematical and scientific contexts. In the final conclusion, category theory should be understood as a bridge between concept and application that serves as a powerful tool for understanding and connecting a wide range of concepts. Its different view of a certain problem facilitates analysis and a deeper understanding of the problem itself. Its true power and potential for further development in different disciplines is just beginning to come to the fore.

Key words: Applied category theory, category, morphism, composition of morphisms, functor, natural transformation